



## $F_p$ -représentations semi-stables

Xavier Caruso

### ► To cite this version:

Xavier Caruso.  $F_p$ -représentations semi-stables. Annales de l'Institut Fourier, 2011, 61 (4), pp.1683-1747. 10.5802/aif.2656 . hal-00338806

**HAL Id: hal-00338806**

**<https://hal.science/hal-00338806>**

Submitted on 14 Nov 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# $\mathbb{F}_p$ -représentations semi-stables

Xavier Caruso

Novembre 2008

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Notion de pylonet</b>	<b>2</b>
1.1	Catégories fibres . . . . .	3
1.2	Le foncteur Max . . . . .	3
1.3	Dualité . . . . .	7
1.4	Catégories fibrées en (semi-)treillis, pylons . . . . .	8
1.5	Le cas additif . . . . .	9
1.6	Avant-goût des applications . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Application à la théorie de Hodge <math>p</math>-adique</b>	<b>11</b>
2.1	Rappel sommaire de la théorie de Breuil . . . . .	11
2.2	Opérateur de monodromie et prolongement de l'action de Galois . . . . .	14
2.3	Vérification des axiomes . . . . .	16
2.4	Un résultat de pleine fidélité . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Quelques formules explicites</b>	<b>18</b>
3.1	Deux adjonctions . . . . .	18
3.2	Éléments nilpotents et objets réduits . . . . .	22
3.3	Des équivalences de catégories . . . . .	23
3.4	La structure de pylonet en termes d'objets réduits . . . . .	25
3.5	Une formule de réciprocity . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Compléments</b>	<b>28</b>
4.1	Variante avec coefficients . . . . .	28
4.2	Passage à une extension finie, donnée de descente . . . . .	29
4.3	Quotients de réseaux . . . . .	31
4.4	Objets simples . . . . .	34

---

Soit  $p$  un nombre premier. Soient  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ ,  $W = W(k)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ ,  $K_0$  son corps des fractions et  $K$  une extension finie de  $K_0$  totalement ramifiée de degré  $e$ . Notons  $G_K$  le groupe de Galois absolu de  $K$  et fixons un entier  $r \in \{0, \dots, p-2\}$ . À partir de ces données, Breuil a défini dans [2] et [6] une certaine catégorie de modules de torsion, notée  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  dans cet article (et dont la définition est rappelée en 2.1). Celle-ci permet *via* un foncteur  $T_{\text{st}}$  de construire certaines  $\mathbb{F}_p$ -représentations du groupe  $G_K$ . Les représentations ainsi obtenues sont intéressantes pour au moins deux raisons : d'une part, elles contiennent un grand nombre de représentations de nature géométrique (données typiquement par la cohomologie étale des variétés), et d'autre part elles regroupent tous les quotients annulés par  $p$  de deux réseaux à l'intérieur d'une même représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et  $r$ . Ainsi la compréhension de cette catégorie et du foncteur associé permet-elle d'obtenir diverses informations générales pouvant trouver des applications variées (voir par exemple [10], [18], [14]).

Lorsque  $er < p-1$ , la situation est plutôt bien comprise : on sait, par les résultats de [10], que la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est abélienne et que le foncteur  $T_{\text{st}}$  est exact et pleinement fidèle. Ainsi, en un certain sens, on ramène l'étude de ces objets compliqués que sont les représentations galoisiennes à des questions d'algèbre

(semi-)linéaire d'apparence plus simple. Cependant, lorsque  $er \geq p - 1$ , les deux résultats essentiels cités précédemment sont facilement mis en défaut. Le but de cet article est de dégager la structure générale de la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et du foncteur  $T_{\text{st}}$  : on prouve essentiellement que  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  admet une sous-catégorie pleine<sup>1</sup>  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (dont les objets sont qualifiés de *maximaux*) qui est abélienne et en restriction à laquelle le foncteur  $T_{\text{st}}$  est exact et pleinement fidèle. De plus, on construit un foncteur  $\text{Max} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow \text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  qui permet de réaliser  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  également comme un quotient de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On a en outre  $T_{\text{st}} \circ \text{Max} = T_{\text{st}}$ , ce qui assure en particulier que la catégorie  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est suffisamment grosse pour être intéressante ; en tout cas, elle capture autant de représentations galoisiennes que ne le fait  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

Afin de présenter les résultats obtenus de façon quelque peu systématique, nous avons choisi d'isoler dans une première section toute une axiomatique dont l'aboutissement est la notion de *pylonet* qui sera centrale dans la suite du texte, puisque c'est elle qui décrit avec précision la structure de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $T_{\text{st}}$ . Cette première section est donc tout à fait générale et abstraite : on s'y borne essentiellement à mener certains développements sur les catégories fibrées.

Avec la deuxième section, on entre dans le vif du sujet : on donne les définitions des catégories de modules et les foncteurs évoqués précédemment puis on montre que  $T_{\text{st}}$  définit un *pylonet* (théorème 2.3.3). La construction de la sous-catégorie  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et du foncteur  $\text{Max}$  dont il a été question auparavant découle alors de l'étude générale de la première partie. La section se termine par la preuve de la pleine fidélité de  $T_{\text{st}}$  en restriction à  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (théorème 2.4.1). On notera que les méthodes de démonstration sont radicalement différentes de celles utilisées dans [10] ; elles sont, selon nous, beaucoup plus conceptuelles, et semblent également avoir une portée bien plus importante.

Dans la troisième section, nous nous efforçons de rendre plus concrètes les constructions faites dans la section 2, notamment en ce qui concerne les noyaux, les conoyaux et le foncteur  $\text{Max}$ . Pour cela, on est amené à introduire la notion d'objets  $T_{\text{st}}$ -réduits. On montre que leur catégorie, notée  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , est équivalente à  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , puis on explique comment de nombreuses constructions se réalisent dans  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On démontre également une formule de réciprocity totalement explicite (même si elle reste un peu compliquée à exprimer) qui permet de retrouver l'unique objet de  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  correspondant à une représentation donnée. Combiné au résultat de [11], cela donne en particulier une recette pour calculer la cohomologie log-cristalline de la fibre spéciale d'une variété  $\mathcal{X}$  à réduction semi-stable sur  $\mathcal{O}_K$  en fonction de la cohomologie étale  $p$ -adique de  $\mathcal{X}_{\bar{K}}$ . (Dans la référence précédente, on obtenait simplement une formule pour aller dans l'autre sens.)

Dans la dernière section, nous poursuivons notre investigation principalement en nous intéressant à certaines variantes de la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  obtenues en introduisant des coefficients ou des données de descente. Dans les deux cas, on montre que l'on obtient encore des pylonets et que la restriction de  $T_{\text{st}}$  aux objets maximaux correspondant est à nouveau exacte et pleinement fidèle. Soulignons que ces variantes interviennent de façon cruciale dans [17] pour étudier certains problèmes de modularité de représentations galoisiennes liés à la généralisation par Buzzard, Diamond et Jarvis de la conjecture de modularité de Serre (voir [8] pour l'énoncé de cette généralisation). Bien que n'étant pas logiquement nécessaire, il nous semble que le cadre théorique fourni par cet article éclaire de façon spectaculaire les calculs de [17], §3.4 (voir aussi [12] à ce sujet).

Nous étudions ensuite une troisième variante, qui est celle que l'on obtient lorsque l'on ne considère que les objets qui s'écrivent comme quotients de deux modules fortement divisibles, et donc qui correspondent à des quotients de deux réseaux dans une représentation semi-stable. Encore une fois, on obtient des résultats analogues : le foncteur  $T_{\text{st}}$  définit un pylonet et sa restriction à la sous-catégorie des objets maximaux est exacte et pleinement fidèle. Finalement, on donne une description complète des objets simples de  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (et de sa variante avec coefficients) lorsque le corps résiduel  $k$  est algébriquement clos.

## 1 Notion de pylonet

Ce premier chapitre est très général et très formel : on y développe une certaine axiomatique de ce que l'on appelle des pylonets et qui sont des « catégories fibrées en sup-semi-treillis satisfaisant la condition de chaîne

<sup>1</sup>Lorsque  $er < p - 1$ , on a  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} = \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (autrement dit, tout objet est maximal, et on retrouve la situation établie dans [10]).

croissante ». Les exemples et applications seront donnés dans les chapitres ultérieurs, lorsque l'on s'intéressera plus précisément aux représentations  $p$ -adiques.

Dans la suite si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, on notera parfois  $C \in \mathcal{C}$  pour dire que  $C$  est un objet de  $\mathcal{C}$ . La donnée de départ de notre travail est celle de deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  et d'un foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  (sur lequel pour l'instant on ne fait aucune hypothèse) que l'on s'efforcera de considérer comme une fibration.

## 1.1 Catégories fibres

Soit  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  un foncteur covariant<sup>2</sup>. Fixons  $A$  un objet de  $\mathcal{A}$ . Il y a deux définitions naturelles pour la fibre de  $T$  au-dessus de  $A$  qui sont :

- la catégorie  $F_A$  dont les objets sont les objets  $C$  de  $\mathcal{C}$  tels que  $T(C) = A$  (ceci est une vraie égalité!) et dont les morphismes sont les flèches de  $\mathcal{C}$  qui s'envoient sur l'identité de  $A$  par le foncteur  $T$ ;
- la catégorie  $\mathcal{F}_A$  dont les objets sont les couples  $(C, f)$  où  $C \in \mathcal{C}$  et  $f : T(C) \rightarrow A$  est un *isomorphisme*, un morphisme de  $(C, f)$  dans  $(C', f')$  étant la donnée de  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$  vérifiant  $f = f' \circ T(g)$ .

L'objet  $A$  étant toujours fixé, les deux catégories  $F_A$  et  $\mathcal{F}_A$  ne sont en général pas équivalentes. Précisément, on dispose d'un foncteur pleinement fidèle  $F_A \rightarrow \mathcal{F}_A$  défini par  $C \mapsto (C, \text{id})$ . L'essentielle surjectivité n'est par contre pas automatique, mais équivaut par définition à l'axiome suivant :

**(Ax0)** *Pour tout  $C \in \mathcal{C}$  et tout isomorphisme (dans  $\mathcal{A}$ )  $f : T(C) \rightarrow A'$ , il existe un isomorphisme (dans  $\mathcal{C}$ )  $g : C \rightarrow C'$  tel que  $T(g) = f$  (et donc  $T(C') = A'$ ).*

On remarquera que cet axiome est une version très affaiblie de l'axiome usuel de changement de base qui apparaît par exemple dans la théorie des champs (algébriques). Nous ne pouvons nous permettre dans cet article de supposer l'axiome usuel de changement de base, car il sera très loin d'être satisfait dans les exemples que nous souhaitons traiter.

Il faut remarquer que **(Ax0)** n'est pas du tout contraignant. En effet, s'il n'est pas vérifié, il est toujours possible de remplacer  $\mathcal{C}$  par une catégorie *équivalente*  $\text{Comp}(\mathcal{C}, T)$  pour laquelle l'axiome est satisfait<sup>3</sup>. Cette catégorie  $\text{Comp}(\mathcal{C}, T)$  est obtenue comme suit :

- ses objets sont les triplets  $(C, A, f)$  où  $C \in \mathcal{C}$ ,  $A \in \mathcal{A}$  et  $f : T(C) \rightarrow A$  est un isomorphisme;
- un morphisme de  $(C, A, f)$  dans  $(C', A', f')$  est la donnée de deux morphismes  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$  et  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A')$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} T(C) & \xrightarrow[\sim]{f} & A \\ T(g) \downarrow & & \downarrow h \\ T(C') & \xrightarrow[\sim]{f'} & A' \end{array}$$

Il est facile de vérifier que le foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \text{Comp}(\mathcal{C}, T)$ ,  $C \mapsto (C, T(C), \text{id})$  est une équivalence de catégories. De plus,  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  se factorise par  $\text{Comp}(\mathcal{C}, T)$  grâce au foncteur précédent et au foncteur, que nous notons encore  $T$ ,  $\text{Comp}(\mathcal{C}, T) \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $(C, A, f) \mapsto A$ . Ce dernier vérifie l'axiome **(Ax0)**.

Dans la suite de cette section, pour simplifier les écritures (par exemple ceci nous permettra de travailler avec les fibres  $F_A$  au lieu de  $\mathcal{F}_A$ ), nous supposerons très fréquemment l'axiome **(Ax0)**. Malgré tout, le lecteur doit garder à l'esprit que ce n'est pas du tout essentiel, et que *tous les résultats obtenus ne faisant pas intervenir de véritables égalités entre objets (mais seulement des isomorphismes) demeurent vrais sans aucune modification si l'hypothèse **(Ax0)** est relâchée*. En réalité, dans les applications que l'on va développer dans les sections suivantes, l'axiome **(Ax0)** ne sera que très rarement satisfait.

## 1.2 Le foncteur Max

En supplément de **(Ax0)**, nous introduisons les trois axiomes suivants :

**(Ax1)** *Le foncteur  $T$  est fidèle.*

<sup>2</sup>Dans les applications, le foncteur  $T$  sera en réalité plutôt contravariant. Cependant, quitte à remplacer  $\mathcal{A}$  par sa catégorie opposée, cela ne modifie en rien la théorie. Nous préférons donc, pour ce premier chapitre, ne pas introduire cette complication inutile.

<sup>3</sup>Après ce remplacement, les fibres  $\mathcal{F}_A$  restent inchangées contrairement aux  $F_A$ . La première notion de fibre que nous évoquons n'est donc pas robuste, dans le sens où elle dépend de  $\mathcal{C}$  à l'intérieur même d'une classe d'équivalence de catégories (ou plus exactement de fibrations). Plus précisément, les  $F_A$  obtenus dans une de ces classes admettent, en un certain sens, un élément maximal qui n'est autre que  $\mathcal{F}_A$ .

**(Ax2)** Les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  admettent des sommes amalgamées, et le foncteur  $T$  y est compatible.

**(Ax3)** Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , soit la catégorie  $\mathcal{F}_A$  est vide, soit elle admet un objet final.

Dans ce paragraphe, nous supposons simplement **(Ax0)**, **(Ax2)** et **(Ax3)**. Nous avons préféré introduire **(Ax1)** dès à présent car, comme nous allons le voir, il joue déjà un rôle particulier dans la situation que nous allons présenter.

Nous construisons un foncteur  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  comme suit. Pour tout objet  $A$  de  $\mathcal{A}$  dont la fibre est non vide, choisissons un objet final  $\text{Fin}(A)$  de la catégorie  $\mathcal{F}_A$ . Sur les objets, le foncteur  $\text{Max}$  est défini par  $\text{Max}(C) = \text{Fin}(T(C))$ . Le fait que  $C$  soit un objet de la fibre  $F_{T(C)}$  fournit un morphisme canonique  $\iota_{\text{max}}^C : C \rightarrow \text{Max}(C)$  dans la catégorie  $\mathcal{C}$  vérifiant  $T(\iota_{\text{max}}^C) = \text{id}_{T(C)}$ . Il reste à définir  $\text{Max}(f)$  lorsque  $f : C_1 \rightarrow C_2$  est un morphisme dans  $\mathcal{C}$ . Considérons pour cela  $C'_2 = C_2 \oplus_{C_1} \text{Max}(C_1)$  la somme amalgamée du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Max}(C_1) & \\ \iota_{\text{max}}^{C_1} \uparrow & & \\ C_1 & \xrightarrow{f} & C_2 \end{array}$$

Notons  $\iota' : C_2 \rightarrow C'_2$  et  $f' : \text{Max}(C_1) \rightarrow C'_2$  les morphismes correspondants. Comme  $T$  est compatible aux sommes amalgamées, quitte à modifier  $C'_2$  par un objet isomorphe (ce que l'on peut faire par l'axiome **(Ax0)**)  $T(C'_2) = T(C_2)$ ,  $T(\iota') = \text{id}_{T(C_2)}$  et  $T(f') = T(f)$ . On en déduit que  $C'_2$  est un objet de  $F_{T(C_2)}$ , d'où on obtient le morphisme  $\iota_{\text{max}}^{C'_2} : C'_2 \rightarrow \text{Max}(C_2)$ . Le morphisme  $\text{Max}(f)$  recherché s'obtient alors comme la composée  $\iota_{\text{max}}^{C'_2} \circ f'$ . Il vérifie  $T(\text{Max}(f)) = T(f)$ .

**Lemme 1.2.1.** Soit

$$\begin{array}{ccc} C'_1 & \xrightarrow{g} & C'_2 \\ h_1 \uparrow & & \uparrow h_2 \\ C_1 & \xrightarrow{f} & C_2 \end{array}$$

un diagramme commutatif dans  $\mathcal{C}$  tel que  $T(C_1) = T(C'_1)$ ,  $T(h_1) = \text{id}$  et  $T(C_2) = T(C'_2)$ ,  $T(h_2) = \text{id}$ . Alors  $\text{Max}(f) = \text{Max}(g)$ .

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que l'hypothèse assure que  $\text{Max}(C_1) = \text{Max}(C'_1)$  et  $\text{Max}(C_2) = \text{Max}(C'_2)$  de sorte que les morphismes  $\text{Max}(f)$  et  $\text{Max}(g)$  ont bien même source et même but. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Max}(C_2) & & \\ & & \uparrow \iota' & & \\ \text{Max}(C'_1) & \xrightarrow{g'} & C'_2 \oplus_{C'_1} \text{Max}(C'_1) & & \\ \parallel & & \uparrow h_2 \oplus \text{id} & & \uparrow \iota \\ \text{Max}(C_1) & \xrightarrow{f'} & C_2 \oplus_{C_1} \text{Max}(C_1) & & \end{array}$$

où  $f'$  et  $g'$  sont définis comme précédemment et où  $\iota$  et  $\iota'$  sont les morphismes canoniques d'un objet dans son  $\text{Max}$ . Ainsi par définition,  $\text{Max}(f) = \iota \circ f'$  et  $\text{Max}(g) = \iota' \circ g'$ . Par ailleurs, comme il y a par définition un unique morphisme dans un objet final et que  $(h_2 \oplus \text{id})$ ,  $\iota$  et  $\iota'$  sont des flèches dans la catégorie  $F_{T(C_2)}$ , on a nécessairement  $\iota = \iota' \circ (h_2 \oplus \text{id})$ . Il s'ensuit

$$\text{Max}(f) = \iota \circ f' = \iota' \circ (h_2 \oplus \text{id}) \circ f' = \iota' \circ g' = \text{Max}(g)$$

comme annoncé.  $\square$

*Remarque.* Sous **(Ax1)**, on remarque que  $\text{Max}(f)$  est l'unique morphisme tel que  $T(\text{Max}(f)) = T(f)$ , ce qui permet de simplifier la preuve du lemme précédent dans ce cas.

**Corollaire 1.2.2.** La construction  $\text{Max}$  définit un foncteur  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , et la collection des morphismes  $(\iota_{\text{max}}^C)_{C \in \mathcal{C}}$  définit une transformation naturelle  $\iota_{\text{max}}$  entre le foncteur identité et  $\text{Max}$ .

*Démonstration.* Le seul point qu'il reste à prouver est la compatibilité de  $\text{Max}$  à la composition des morphismes. Considérons pour cela deux morphismes composables  $f$  et  $g$ . Par le lemme 1.2.1, on a  $\text{Max}(f \circ g) = \text{Max}(\text{Max}(f) \circ \text{Max}(g))$ . Or  $\text{Max}(f) \circ \text{Max}(g)$  est un morphisme entre objets de l'image de  $\text{Max}$ , et on vérifie immédiatement sur la définition que  $\text{Max}$  ne modifie pas un tel morphisme. Le corollaire s'ensuit.  $\square$

## Digression sur les problèmes de logique

Dans la construction précédente, on a eu besoin de choisir, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , un objet final dans  $F_A$ . Étant donné que  $\mathcal{A}$  n'est *a priori* pas un ensemble, on peut se demander dans quelle mesure, ce choix est légitime. Dans le cas général, il semble délicat de justifier cette opération sans introduire la théorie des univers de Grothendieck ou des considérations analogues.

Toutefois, il est deux situations dans lesquelles on peut envisager des palliatifs satisfaisants. La première est bien entendu celle où  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, auquel cas il est suffisant d'invoquer l'axiome du choix. En pratique, si les catégories que l'on considère ne sont pas petites, il sera néanmoins presque toujours possible de modifier les définitions pour les remplacer par des petites catégories. Ainsi, les problèmes de logique sous-jacents ne sont pas de véritables obstacles lorsque l'on envisage les applications.

Malgré tout, si l'on suppose **(Ax1)**, il est possible de mener les constructions précédentes sans même avoir recours à l'axiome du choix, quitte à remplacer  $\mathcal{C}$  par une catégorie équivalente. Soit  $\bar{\mathcal{C}}$  la catégorie dont les objets sont l'union disjointe

- des objets de  $\mathcal{C}$  qui ne sont pas des objets maximaux dans leur fibre et
- des objets de  $\mathcal{A}$  qui sont dans l'image de  $T$ .

La définition des morphismes est un peu plus délicate, et utilise **(Ax1)** (du moins si l'on souhaite se passer de l'axiome du choix). Soient  $\bar{C}_1$  et  $\bar{C}_2$  deux objets de  $\bar{\mathcal{C}}$ . Si  $\bar{C}_1$  est dans  $\mathcal{C}$ , on pose  $C_1 = \bar{C}_1$  ; sinon, on désigne par  $C_1$  un objet final (quelconque) de  $F_{\bar{C}_1}$ . On définit de même  $C_2$ . On pose :

$$\text{Hom}_{\bar{\mathcal{C}}}(\bar{C}_1, \bar{C}_2) = \text{image}[\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T(C_1), T(C_2))].$$

Il s'agit de montrer que la quantité du membre de droite ne dépend pas des choix de  $C_1$  et  $C_2$ , lorsqu'il y a effectivement plusieurs choix pour ces objets, c'est-à-dire lorsque  $\bar{C}_1$  ou  $\bar{C}_2$  est un objet de  $\mathcal{A}$ . On ne traite que le cas de  $C_1$ , celui de  $C_2$  étant analogue. Supposons donc que  $C_1$  et  $C'_1$  soient deux objets finaux de la même fibre  $F_A$ . Alors, il existe un (unique) morphisme  $f : C_1 \rightarrow C'_1$  tel que  $T(f) = \text{id}$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T(C_1), T(C_2)) \\ f^* \uparrow & & \parallel \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C'_1, C_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T(C'_1), T(C_2)) \end{array}$$

qui permet de conclure.

La catégorie  $\bar{\mathcal{C}}$  est reliée aux données précédentes, notamment grâce à un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  défini comme suit. À un objet non final, il associe le même objet, alors qu'à un objet final, il associe son image sous  $T$ . Sur les morphismes, il est donné par la corestriction du morphisme  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(T(C_1), T(C_2))$  déduit de  $T$ . Comme  $T$  est fidèle, ce dernier est par définition injectif, et donc la corestriction considérée est une bijection. Ceci assure que  $F$  est pleinement fidèle. Par ailleurs, on vérifie facilement qu'il est aussi essentiellement surjectif. Ainsi  $F$  est une équivalence de catégories.

La catégorie  $\bar{\mathcal{C}}$  permet aussi de factoriser  $T$  : la définition même de la relation d'équivalence sur les objets de  $\mathcal{C}$  montre que la factorisation existe bien au niveau des objets, alors qu'au niveau des morphismes, cela découle de la pleine fidélité de  $F$ . (Notez que l'on ne peut pas dire plus simplement que cette factorisation est obtenue en considérant un quasi-inverse de  $F$ , puisqu'une telle construction utilise l'axiome du choix, ce qui est précisément ce que l'on souhaite éviter.) Notons  $\bar{T} : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}$  le foncteur obtenu. Il est facile de vérifier que la fibration  $\bar{T}$  vérifie encore les axiomes **(Ax0)**, **(Ax1)**, **(Ax2)** et **(Ax3)**, et que, par construction, l'objet maximal de chaque fibre non vide  $F_A$  est uniquement déterminé (à rien près). Il n'y a donc plus besoin de l'axiome du choix pour définir  $\text{Fin}(A)$ , ni donc le foncteur  $\text{Max}$ .

### La catégorie $\text{Max}(\mathcal{C})$

**Définition 1.2.3.** Un objet  $C \in \mathcal{C}$  est dit *maximal* si le morphisme  $\iota_{\text{max}}^C : C \rightarrow \text{Max}(C)$  est un isomorphisme.

**Proposition 1.2.4.** Le foncteur  $\text{Max}$  est idempotent, i.e.  $\text{Max} \circ \text{Max} = \text{Max}$  (sur les objets et sur les morphismes).

L'image essentielle de  $\text{Max}$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  formée des objets maximaux. On la note  $\text{Max}(\mathcal{C})$ .

*Démonstration.* Clair d'après les définitions. □

*Remarque.* L'image de  $\text{Max}$  peut être strictement plus petite que  $\text{Max}(\mathcal{C})$ . Cela ne se produit toutefois pas si **(Ax0)** est vérifié.

Nous prouvons à présent plusieurs propriétés de la catégorie  $\text{Max}(\mathcal{C})$  qui découlent toutes presque directement des définitions. Nous commençons pour cela par un lemme important.

**Lemme 1.2.5.** *Soit  $f : C \rightarrow C'$  un morphisme dans  $\mathcal{C}$ . Alors  $T(f)$  est un isomorphisme si, et seulement si  $\text{Max}(f)$  en est un.*

*Démonstration.* Si  $T(f)$  est un isomorphisme, quitte à remplacer  $C'$  par un objet isomorphe, l'axiome **(Ax0)** nous autorise à supposer que  $T(f) = \text{id}$ . Alors  $C$  et  $C'$  sont deux objets d'une même fibre, et par définition  $\text{Max}(C) = \text{Max}(C')$  et  $\text{Max}(f)$  n'est autre que l'identité entre ces deux objets.

Réciproquement si  $\text{Max}(f)$  est un isomorphisme,  $T(\text{Max}(f)) = T(f)$  en est un aussi.  $\square$

**Proposition 1.2.6.** *Le foncteur  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$  est un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion  $\text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Soient  $C \in \mathcal{C}$  et  $M \in \text{Max}(\mathcal{C})$ . Nous voulons exhiber une identification canonique entre  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, M)$  et  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Max}(\mathcal{C}), M)$ . Or, on dispose d'une application  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Max}(\mathcal{C}), M)$  donnée par le foncteur  $\text{Max}$  (puisque par la proposition 1.2.4,  $\text{Max}(M)$  est canoniquement isomorphe à  $M$  via  $\iota_{\text{Max}}^M$ ) et d'une application  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Max}(\mathcal{C}), M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, M)$  obtenue en composant par le morphisme canonique  $\iota_{\text{Max}}^C : C \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$ . On vérifie facilement en utilisant  $\text{Max}(\iota_{\text{Max}}^C) = \text{id}_{\text{Max}(\mathcal{C})}$  que les deux applications précédentes sont inverses l'une de l'autre.  $\square$

**Proposition 1.2.7.** *Le foncteur  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$  réalise la localisation de la catégorie  $\mathcal{C}$  par rapport aux morphismes  $f$  tels que  $T(f)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Supposons donné un foncteur  $F$  de  $\mathcal{C}$  dans une catégorie  $\mathcal{X}$  tel que  $F(f)$  est un isomorphisme dès que  $T(f)$  en est un. Soit  $G$  la composée  $\text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  où le premier foncteur est l'inclusion canonique et le second est  $F$ . Pour tout  $C \in \mathcal{C}$ ,  $T(\iota_{\text{Max}}^C) = \text{id}_{T(C)}$  est inversible, et donc par hypothèse il en est de même de  $F(\iota_{\text{Max}}^C)$ . La famille des  $F(\iota_{\text{Max}}^C)$  définit donc une transformation naturelle *inversible* entre les foncteurs  $F$  et  $G \circ \text{Max}$ . Ceci termine la preuve.  $\square$

En vertu de cette proposition, le foncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  se factorise par  $\text{Max}(\mathcal{C})$  par l'intermédiaire d'un foncteur  $T_{\text{Max}} : \text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ , qui n'est autre (d'après la preuve que l'on vient de donner) que la restriction de  $T$  à  $\text{Max}(\mathcal{C})$ .

**Proposition 1.2.8.** *Le foncteur  $T_{\text{Max}}$  est conservatif, en ce sens qu'il vérifie :  $f$  est un isomorphisme si, et seulement si  $T_{\text{Max}}(f)$  en est un.*

*Si le foncteur  $T$  est fidèle (resp. plein, resp. essentiellement surjectif), alors il en est de même de  $T_{\text{Max}}$ .*

*Démonstration.* La première partie de la proposition est une conséquence directe du lemme 1.2.5. La seconde assertion à propos des propriétés de fidélité et de plénitude résulte de ce que  $T_{\text{Max}}$  est obtenu comme une restriction du foncteur  $T$ . Pour la propriété d'essentielle surjectivité, elle résulte de l'égalité  $T_{\text{Max}} \circ \text{Max} = T$ .  $\square$

**Proposition 1.2.9.** *La fibration  $T_{\text{Max}} : \text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$  vérifie encore les axiomes **(Ax0)**, **(Ax2)** et **(Ax3)** (où, bien entendu, les fibres  $\mathcal{F}_A$  sont calculées à partir du foncteur  $T_{\text{Max}}$ ).*

*En outre, pour tout  $A$ , il existe un groupe  $G_A$  tel que la catégorie  $\mathcal{F}_A$  soit équivalente à la catégorie ayant un unique objet  $\bullet$  vérifiant  $\text{End}(\bullet) = G_A$ . Si de plus **(Ax1)** est vérifié, tous les groupes  $G_A$  sont réduits à l'identité.*

*Démonstration.* Le seul point non trivial réside dans la vérification de **(Ax2)**. Mais, si  $M \rightarrow M'$  et  $M \rightarrow M''$  sont des morphismes dans la catégorie  $\text{Max}(\mathcal{C})$ , on vérifie en utilisant la proposition 1.2.6 que  $\text{Max}(M' \oplus_M M'')$  (où  $M' \oplus_M M''$  désigne la somme amalgamée dans  $\mathcal{C}$ ) satisfait la propriété universelle de la somme amalgamée dans  $\text{Max}(\mathcal{C})$ .  $\square$

*Remarque.* Comme  $T_{\text{Max}}$  vérifie encore les axiomes **(Ax0)**, **(Ax2)** et **(Ax3)**, on peut répéter la construction  $\text{Max}$  et obtenir ainsi un foncteur  $\text{Max} : \text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$ . Il est facile de voir à partir de ce qui précède que celui-ci est (isomorphe à) l'identité ; en particulier,  $\text{Max}(\text{Max}(\mathcal{C})) = \text{Max}(\mathcal{C})$ .

### 1.3 Dualité

Introduisons les axiomes duaux de **(Ax2)** et **(Ax3)** à savoir respectivement :

**(Ax2\*)** Les catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}$  admettent des produits fibrés, et le foncteur  $T$  y est compatible.

**(Ax3\*)** Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , la catégorie  $\mathcal{F}_A$  admet un objet initial.

Bien entendu, si ceux-ci sont satisfaits en plus de **(Ax0)**, on définit par une construction analogue à la précédente un foncteur  $\text{Min} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  muni de morphismes naturels  $\iota_{\text{min}}^C : \text{Min}(C) \rightarrow C$  pour tout  $C \in \mathcal{C}$ . On dit qu'un objet est *minimal* si  $\iota_{\text{min}}^C$  est un isomorphisme, et on note  $\text{Min}(\mathcal{C})$  la sous-catégorie pleine des objets minimaux. Toutes ces structures vérifient évidemment des propriétés semblables à celles listées précédemment pour le foncteur  $\text{Max}$  (que nous laissons au lecteur le soin d'écrire complètement). En particulier la fibration  $T$  fournit par restriction (ou, au choix, par passage au quotient) une fibration  $T_{\text{min}} : \text{Min}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{X}$  est une catégorie, on définit une *dualité* sur  $\mathcal{X}$  comme la donnée d'un foncteur contravariant  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $X \mapsto X^*$  et d'une identification fonctorielle entre  $(X^*)^*$  et  $X$ . Considérons l'axiome suivant :

**(Ax4)** Il existe des dualités sur  $\mathcal{C}$  et sur  $\mathcal{A}$  compatibles au foncteur  $T$  (c'est-à-dire qu'il existe une identification naturelle entre  $T(C^*)$  et  $T(C)^*$ ).

S'il est vérifié, la dualité sur  $\mathcal{C}$  induit pour tout  $A \in \mathcal{A}$  une anti-équivalence de catégories entre  $F_A$  et  $F_{A^*}$ . On en déduit que, sous **(Ax4)**, les conditions **(Ax2)** et **(Ax2\*)** (resp. **(Ax3)** et **(Ax3\*)**) sont équivalentes.

On suppose désormais **(Ax0)**, **(Ax2)**, **(Ax3)**, **(Ax2\*)** et **(Ax3\*)**. On souhaite comparer les deux foncteurs  $\text{Min} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , ainsi que les catégories  $\text{Min}(\mathcal{C})$  et  $\text{Max}(\mathcal{C})$  associées. On commence pour cela par un lemme.

**Lemme 1.3.1.** On a  $\text{Min} \circ \text{Max} = \text{Min}$  et  $\text{Max} \circ \text{Min} = \text{Max}$  (sur les objets et sur les morphismes).

*Démonstration.* Pour les objets, c'est immédiat au vu des définitions. Pour les morphismes, c'est une conséquence du lemme 1.2.1.  $\square$

**Corollaire 1.3.2.** Les restrictions  $\text{Min} : \text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Min}(\mathcal{C})$  et  $\text{Max} : \text{Min}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$  définissent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre.

*Démonstration.* D'après le lemme 1.3.1, il suffit de montrer que le foncteur  $\text{Min}$  (resp.  $\text{Max}$ ) est isomorphe au foncteur identité sur la catégorie  $\text{Min}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Max}(\mathcal{C})$ ), ce qui est immédiat par définition de cette catégorie.  $\square$

*Remarque.* Puisque les deux catégories  $\text{Min}(\mathcal{C})$  et  $\text{Max}(\mathcal{C})$  s'obtiennent comme localisation de  $\mathcal{C}$  par rapport au même ensemble de morphismes (proposition 1.2.7), on savait déjà qu'elles étaient équivalentes. Le corollaire précédent précise cela en donnant les foncteurs réalisant cette équivalence.

**Corollaire 1.3.3.** Les fibrations  $T_{\text{max}} : \text{Max}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$  et  $T_{\text{min}} : \text{Min}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{A}$  satisfont toutes les deux les axiomes **(Ax0)**, **(Ax2)**, **(Ax3)**, **(Ax2\*)** et **(Ax3\*)**.

*Démonstration.* Par la proposition 1.2.9,  $\text{Max}(\mathcal{C})$  satisfait déjà **(Ax0)**, **(Ax2)** et **(Ax3)**. En dualisant cette proposition, on obtient que  $\text{Min}(\mathcal{C})$  satisfait **(Ax2\*)** et **(Ax3\*)**. Maintenant, les foncteurs  $\text{Min}$  et  $\text{Max}$  commutant à  $T$ , le corollaire 1.3.2 entraîne que les fibrations  $T_{\text{max}}$  et  $T_{\text{min}}$  sont isomorphes. La conclusion s'ensuit.  $\square$

*Remarque.* Les sommes amalgamées et produits fibrés dans  $\text{Min}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Max}(\mathcal{C})$ ) s'obtiennent en appliquant le foncteur  $\text{Min}$  (resp.  $\text{Max}$ ) aux constructions correspondantes dans la catégorie  $\mathcal{C}$ .

À partir de maintenant, on suppose en plus **(Ax4)**.

**Proposition 1.3.4.** Pour  $C \in \mathcal{C}$ , on a  $\text{Max}(C^*) \simeq \text{Min}(C)^*$  et  $\text{Min}(C^*) \simeq \text{Max}(C)^*$ . En particulier, la dualité de  $\mathcal{C}$  permute les catégories  $\text{Min}(\mathcal{C})$  et  $\text{Max}(\mathcal{C})$ .

Le foncteur  $C \mapsto \text{Max}(C^*)$  (resp.  $C \mapsto \text{Min}(C^*)$ ) définit une dualité de  $\text{Max}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Min}(\mathcal{C})$ ) compatible au foncteur  $T_{\text{max}}$  (resp.  $T_{\text{min}}$ ).

*Démonstration.* La première partie de la proposition résulte de ce que la dualité de  $\mathcal{C}$  induit une anti-équivalence de catégories entre  $F_{T(\mathcal{C})}$  et  $F_{T(\mathcal{C}^*)}$ .

Si  $D(C) = \text{Max}(C^*)$ , on a, pour  $C \in \text{Max}(\mathcal{C})$  :

$$D(D(C)) = \text{Max}(\text{Max}(C^*)^*) \simeq \text{Max}(\text{Min}(C^{**})) \simeq \text{Max}(\text{Min}(C)) = \text{Max}(C) \simeq C$$

dans l'ordre d'après la première partie de la proposition, la définition d'une dualité, le lemme 1.3.1, et finalement le fait que  $C$  soit maximal. Ce calcul assure que  $D$  est une dualité. La compatibilité à  $T_{\text{max}}$  est immédiate. Finalement, le même argument fonctionne pour  $C \mapsto \text{Min}(C^*)$ .  $\square$



## 1.4 Catégories fibrées en (semi-)treillis, pylonets

Dans les applications que l'on a en vue, on ne vérifiera jamais **(Ax3)** directement, mais on empruntera un chemin légèrement détourné que l'on explique ci-dessous. Tout au long de ce paragraphe, on suppose **(Ax1)**.

**Lemme 1.4.1.** *Soient  $C$  et  $C'$  deux objets d'une fibre  $F_A$ . Alors  $\text{Hom}_{F_A}(C, C')$  a au plus un élément.*

*Démonstration.* Tout  $f \in \text{Hom}_{F_A}(C, C')$  vérifie par définition  $T(f) = \text{id}_A$ . Le lemme résulte alors de la fidélité de  $T$ .  $\square$

On rappelle qu'une catégorie vérifiant la condition du lemme correspond simplement à un préordre sur l'« ensemble » de ses objets : un objet  $C$  est plus petit que  $C'$  s'il existe effectivement un morphisme de  $C$  dans  $C'$ . On rappelle également que les constructions usuelles sur les ensembles (pré)ordonnés ont en général des équivalents simples en langage des catégories : par exemple, pour ne citer que celles qui vont nous intéresser dans la suite, une borne supérieure est une somme directe, et un élément maximal est un objet final<sup>4</sup>. Sachant cela, on démontre facilement (supposant toujours **(Ax1)**) que **(Ax3)** est impliqué par les deux axiomes suivants :

**(Ax3a)** *Les catégories  $\mathcal{F}_A$  admettent des sommes directes (finies).*

**(Ax3b)** *Les catégories  $\mathcal{F}_A$  satisfont la condition de chaîne croissante (c.c.c) : pour toute suite infinie de morphismes*

$$C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} C_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} C_n \xrightarrow{f_n} \cdots$$

*il existe un entier  $N$  tel que  $f_n$  soit un isomorphisme pour tout  $n \geq N$ .*

Bien entendu, il existe des versions duales de ces axiomes à savoir :

**(Ax3a\*)** *Les catégories  $\mathcal{F}_A$  admettent des produits (finis).*

**(Ax3b\*)** *Les catégories  $\mathcal{F}_A$  satisfont la condition de chaîne décroissante (c.c.d) : pour toute suite infinie de morphismes*

$$C_1 \xleftarrow{f_1} C_2 \xleftarrow{f_2} C_3 \xleftarrow{f_3} \cdots \xleftarrow{f_{n-1}} C_n \xleftarrow{f_n} \cdots$$

*il existe un entier  $N$  tel que  $f_n$  soit un isomorphisme pour tout  $n \geq N$ .*

Sous l'hypothèse **(Ax1)**, ils impliquent **(Ax3\*)**. Par ailleurs, si l'on suppose **(Ax4)**, les énoncés **(Ax3a)** et **(Ax3a\*)** d'une part, et **(Ax3b)** et **(Ax3b\*)** d'autre part sont équivalents.

Terminons ce paragraphe par quelques remarques et un peu de terminologie. En théorie des ordres, un ensemble ordonné satisfaisant les (équivalents des) axiomes **(Ax3a)** et **(Ax3a\*)** est ce que l'on appelle un *treillis*. De même, les conditions qui apparaissent dans **(Ax3b)** et **(Ax3b\*)** sont ainsi nommées car les propriétés correspondantes sur les ensembles ordonnés portent ces noms. Tout ceci conduit à poser la définition suivante.

**Définition 1.4.2.** Une fibration  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  vérifiant les axiomes **(Ax1)**, **(Ax2)**, **(Ax3a)** (resp. **(Ax3a\*)**) est appelée une *catégorie fibrée en sup-semi-treillis* (resp. une *catégorie fibrée en inf-semi-treillis*). Si les deux axiomes **(Ax3a)** et **(Ax3a\*)** sont vérifiés, on parlera simplement de *catégorie fibrée en treillis*.

On dit que  $T$  vérifie c.c.c (resp. c.c.d) si l'axiome **(Ax3b)** (resp. **(Ax3b\*)**) est satisfait. On dit qu'elle est *autoduale* si l'axiome **(Ax4)** est satisfait.

*Remarque.* On pourra s'étonner de ne pas voir apparaître **(Ax0)** dans la définition précédente, alors que toute la théorie que nous avons développée semble reposer sur cet axiome. Toutefois, comme nous l'avons expliqué en 1.1, on peut toujours remplacer  $\mathcal{C}$  par une catégorie équivalente pour laquelle **(Ax0)** est satisfait. Nous préférons ne pas inclure **(Ax0)** dans la définition précédente, car il ne sera en fait pas vérifié dans les exemples que nous allons manipuler par la suite.

Pour simplifier la terminologie, nous introduisons la définition suivante.

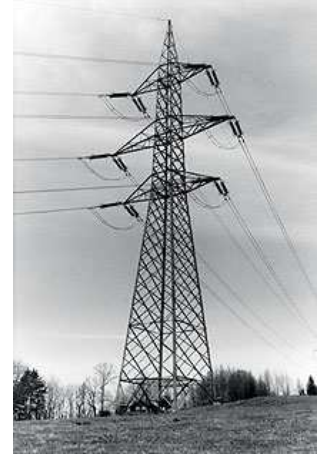
**Définition 1.4.3.** Une catégorie fibrée en sup-semi-treillis satisfaisant c.c.c est appelée un *pylonet*.

---

<sup>4</sup>Ce que justifie la notation Max pour le foncteur construit précédemment.

*Remarques.* Cette terminologie est basée sur la concaténation des deux mots *pylone* et *net*. Le premier d'entre eux se rapporte aux fibres de  $T$  qui, en un sens imagée, ressemblent à des pylones électriques (voir photo ci-contre), la structure métallique de ceux-ci pouvant évoquer un ordre admettant des bornes supérieures finies et satisfaisant c.c.c (voire la condition plus forte **(Ax3c)** donnée plus bas). Le mot *net*, quant à lui, est un anglicisme à prendre dans le sens de réseau : il faut imaginer que ces pylones sont reliés par tout un tissu de câbles (électriques) qui correspondent aux morphismes de la catégorie  $\mathcal{C}$  dont l'image par  $T$  n'est pas l'identité. La propriété fondamentale des pylonet est que tout pylone (*i.e.* toute fibre) admet un sommet (*i.e.* un élément maximal) et qu'à tout câble reliant deux pylones (*i.e.* tout morphisme de  $\mathcal{C}$ ), il est associé un unique câble reliant les sommets des pylones correspondants.

Si le foncteur  $T$  est contravariant, on dira que le pylonet est lui-même *contravariant*.



Finalement, il est possible d'imaginer une version forte des axiomes **(Ax3b)** et **(Ax3b\*)** qui est :

**(Ax3c)** Les catégories  $\mathcal{F}_A$  sont de hauteur finie, dans le sens où il existe un entier  $N$  (qui dépend de  $A$ ) telle que toute suite de  $N$  morphismes

$$C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} C_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_N} C_{N+1}$$

contient au moins un isomorphisme.

Contrairement à **(Ax3b)** et **(Ax3b\*)**, l'axiome **(Ax3c)** est autodual, et comme nous l'avons dit (ou du moins sous-entendu) précédemment, il implique à lui seul les deux énoncés **(Ax3b)** et **(Ax3b\*)**. Encore une fois, signalons que la terminologie « de hauteur finie » est recopiée de celle couramment utilisée pour les treillis.

## 1.5 Le cas additif

Nous étudions à présent le cas particulier décrit par l'axiome suivant.

**(Ax5)** La catégorie  $\mathcal{C}$  est additive, la catégorie  $\mathcal{A}$  est abélienne et le foncteur  $T$  est additif.

On dira dans ce cas que la fibration  $T$  est *additive*. En particulier, on pourra parler de *catégories fibrées en (semi-)treillis additives*, et même de *pylonets additifs*.

Remarquons que, sous **(Ax5)**, la condition **(Ax2)** (resp. **(Ax2\*)**) est équivalente à l'existence de conoyaux (resp. de noyaux) dans  $\mathcal{C}$  et au fait que  $T$  commute à la formation de ceux-ci. Supposons à partir de maintenant, en plus de **(Ax5)**, les axiomes **(Ax0)**, **(Ax2)**, **(Ax3)**. D'après la discussion menée en 1.2, on dispose d'un foncteur  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et d'une sous-catégorie pleine  $\text{Max}(\mathcal{C})$  vérifiant un certain nombre de propriétés sympathiques.

**Lemme 1.5.1.** *Le foncteur  $\text{Max}$  est additif.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $\text{Max}(C \oplus C')$  est naturellement isomorphe à  $\text{Max}(C) \oplus \text{Max}(C')$ . Or, les inclusions canoniques  $C \rightarrow C \oplus C'$  et  $C' \rightarrow C \oplus C'$  permettent de construire un morphisme  $\alpha : \text{Max}(C) \oplus \text{Max}(C') \rightarrow \text{Max}(C \oplus C')$ , tandis que les projections  $C \oplus C' \rightarrow C$  et  $C \oplus C' \rightarrow C'$  donnent un morphisme  $\beta : \text{Max}(C \oplus C') \rightarrow \text{Max}(C) \oplus \text{Max}(C')$ . Il est formel de vérifier que  $\beta \circ \alpha$  est l'identité. Par ailleurs, du fait que  $T$  est additif, on déduit que  $T(\alpha \circ \beta) = \text{id}_{T(C \oplus C')}$ . Ainsi  $\alpha \circ \beta$  est un endomorphisme de l'objet final de  $F_{T(C \oplus C')}$  ; il ne peut donc être que l'identité et le lemme en découle.  $\square$

Supposons maintenant en supplément de ce qui précède les axiomes duaux **(Ax2\*)** et **(Ax3\*)**. Ils permettent à leur tour de construire un foncteur additif  $\text{Min} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et une sous-catégorie  $\text{Min}(\mathcal{C})$ .

**Proposition 1.5.2.** *Dans la situation précédente, les catégories  $\text{Max}(\mathcal{C})$  et  $\text{Min}(\mathcal{C})$  sont abéliennes et la restriction du foncteur  $T$  à ces catégories est exact.*

*Démonstration.* Nous ne donnons la preuve que pour  $\text{Max}(\mathcal{C})$ , le cas de  $\text{Min}(\mathcal{C})$  se traitant pareillement. Par le lemme 1.5.1,  $\text{Max}(\mathcal{C})$  contient l'objet nul et est stable par somme directe ; c'est donc déjà une catégorie additive. Sachant cela, le corollaire 1.3.3 entraîne l'existence de noyaux et de conoyaux dans  $\text{Max}(\mathcal{C})$ . Pour conclure, il suffit de montrer que si  $f$  est une flèche dans  $\text{Max}(\mathcal{C})$ , le morphisme induit  $\bar{f} : \text{coim } f \rightarrow \text{im } f$  est un isomorphisme. Or, comme  $T$  commute à la formation des noyaux et conoyaux dans  $\text{Max}(\mathcal{C})$  (corollaire 1.3.3),

$T(\bar{f})$  s'identifie au morphisme  $\text{coim } T(f) \rightarrow \text{im } T(f)$  induit par  $T(f)$ . Comme  $\mathcal{A}$  est une catégorie abélienne,  $T(f)$  est un isomorphisme, et donc, par le lemme 1.2.5,  $\text{Max}(\bar{f})$  également. Finalement, étant donné que par construction  $\bar{f}$  est un morphisme entre deux objets maximaux, il s'identifie à  $\text{Max}(f)$  et est par suite lui aussi un isomorphisme.

Il reste à montrer que la restriction de  $T$  à  $\text{Max}(\mathcal{C})$  est exact, mais ceci découle directement de la commutation de ce foncteur à la formation des noyaux et des conoyaux.  $\square$

Terminons ce paragraphe en soulignant qu'il est possible d'obtenir un substitut à la proposition précédente dans une situation légèrement différente. Précisément, on remplace **(Ax3\*)** par la nouvelle hypothèse **(Ax1)**. Ce cas paraît de prime abord un peu batard car il ne permet pas de définir le foncteur  $\text{Min}$ . Malgré tout, on dispose de la proposition suivante :

**Proposition 1.5.3.** *Dans la situation précédente, la catégorie  $\text{Max}(\mathcal{C})$  est abélienne et la restriction du foncteur  $T$  à cette catégorie est exacte.*

*Démonstration.* Prouvons tout d'abord que  $\text{Max}$  est un foncteur fidèle. Soit  $f$  un morphisme de  $\mathcal{C}$  tel que  $\text{Max}(f) = 0$ . En appliquant  $T$  à cette dernière égalité, on obtient  $T(f) = 0$ , puis  $f = 0$  par fidélité de  $T$ . Ceci démontre notre assertion.

Par le lemme 1.5.1,  $\text{Max}(\mathcal{C})$  est une catégorie additive. Par la première partie de la proposition 1.2.9,  $\text{Max}(\mathcal{C})$  admet des conoyaux et la formation de ceux-ci commute au foncteur  $T$ . Il reste à montrer qu'il en est de même pour les noyaux. En effet, après, on pourra appliquer le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 1.5.2 pour obtenir l'isomorphisme entre image et coimage.

Nous montrons en fait le résultat plus général suivant : si  $f : C \rightarrow C'$  est un morphisme dans  $\mathcal{C}$  et si  $K$  est son noyau, alors  $\text{Max}(K)$  est le noyau dans  $\text{Max}(\mathcal{C})$  du morphisme  $\text{Max}(f)$ . Soit  $X$  un objet de  $\text{Max}(\mathcal{C})$  muni d'un morphisme  $G : X \rightarrow \text{Max}(C)$  tel que  $\text{Max}(f) \circ G = 0$ . Nous voulons montrer que  $G$  se factorise de façon unique par  $\text{Max}(K)$ . Notons  $X' = X \times_{\text{Max}(C)} C$  le produit fibré de  $X$  et  $C$  au-dessus de  $\text{Max}(C)$ . Quitte à remplacer  $X'$  par un objet isomorphe grâce à l'axiome **(Ax0)**, on a  $T(X') = T(X)$ , d'où il suit  $\text{Max}(X') \simeq X$ . De plus, le morphisme canonique  $g : X' \rightarrow C$  vérifie  $\text{Max}(g) = G$ , d'où on déduit  $\text{Max}(f \circ g) = 0$  puis  $f \circ g = 0$  par fidélité de  $\text{Max}$ . Puisque  $K$  est le noyau de  $f$ , il suit que  $g$  se factorise par  $K$ , et donc par functorialité,  $G = \text{Max}(g)$  se factorise par  $\text{Max}(K)$ . L'unicité de cette factorisation résulte à nouveau de la fidélité de  $\text{Max}$ .  $\square$

## 1.6 Avant-goût des applications

Au fil des chapitres suivants, nous verrons que les pylonets sont des structures qui apparaissent naturellement en géométrie algébrique, et plus précisément en théorie de Hodge  $p$ -adique. L'exemple fondamental duquel tout ce travail est inspiré est le suivant :  $\mathcal{C}$  est la catégorie des schémas en groupes commutatifs finis et plats annulés par  $p$  (ou une puissance de  $p$ ) sur l'anneau des entiers d'un corps  $p$ -adique  $K$ , alors que le foncteur  $T$  est celui qui à un tel groupe associe la représentation galoisienne donnée par ses  $\bar{K}$ -points. Il résulte des travaux de Raynaud (voir [15], §2.2) que cette fibration  $T$  est un pylonet autodual<sup>5</sup> (définitions 1.4.2 et 1.4.3) et additif (*i.e.* satisfaisant **(Ax5)**). Le but de cet article est de montrer que cette situation n'est pas isolée, mais au contraire se généralise à de nombreuses autres fibrations rencontrées en théorie de Hodge  $p$ -adique. Ce papier fait en réalité suite à un travail antérieur [13], dans lequel il est montré (sans le dire explicitement) que certaines catégories de modules définissent des pylonets additifs et, dans certains cas favorables, autoduaux.

Nous nous intéresserons donc par la suite à d'autres exemples de fibrations :  $\mathcal{A}$  sera la catégorie des  $\mathbb{F}_p$ -représentations (ou de  $E$ -représentations pour une extension finie  $E$  de  $\mathbb{F}_p$ ) du groupe de Galois absolu d'un corps  $p$ -adique,  $\mathcal{C}$  s'instanciera en certaines catégories de « modules de Breuil », et  $T$  sera le foncteur de réalisation galoisienne correspondant. On rappelle (pour l'instant très brièvement) que  $T$  admet généralement une version covariante et une contravariante. La version contravariante sera plus adaptée aux cas qui nous intéressent et c'est donc celle que nous manipulerons tout au long de cet article.

Nous allons montrer que ces données fournissent des pylonets (contravariants) autoduaux et additifs, c'est-à-dire, d'après les définitions, qu'elles obéissent à **(Ax1)**, **(Ax2)**, **(Ax3a)**, **(Ax3b)**, **(Ax4)** et **(Ax5)**. De façon générale, la vérification de **(Ax5)** sera toujours immédiate, alors que celle de **(Ax4)**, **(Ax1)** et **(Ax3b)** résultera directement de travaux antérieurs ([13]). Ainsi, l'essentiel du travail consistera en l'établissement des énoncés **(Ax2)** et **(Ax3a)**. Après cela, on pourra déduire toute une liste de propriétés agréables sur la

<sup>5</sup>Les dualités sont d'une part la dualité de Cartier sur les schémas en groupes, et d'autre part la dualité usuelle twistée (par le twist de Tate) sur les représentations galoisiennes.

fibration  $T$ . Afin de faciliter la tâche du lecteur (et bien que cela fasse certainement redite), nous avons choisi de les regrouper dans le théorème suivant :

**Théorème 1.6.1.** *Soit  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  un pylonet contravariant additif et autodual. Alors :*

- (cf §1.4) *Pour tout  $C \in \mathcal{C}$ , il existe un unique (à isomorphisme unique près) couple  $(\text{Max}(C), \iota_{\text{max}}^C : C \rightarrow \text{Max}(C))$  (resp.  $(\text{Min}(C), \iota_{\text{min}}^C : \text{Min}(C) \rightarrow C)$ ) satisfaisant la propriété universelle suivante :*
  - *le  $\mathcal{A}$ -morphisme  $T(\iota_{\text{max}}^C)$  (resp.  $T(\iota_{\text{min}}^C)$ ) est un isomorphisme ;*
  - *pour tout  $C' \in \mathcal{C}$  muni d'une flèche  $f : C \rightarrow C'$  (resp.  $f : C' \rightarrow C$ ) telle que  $T(f)$  est un isomorphisme, il existe un unique  $g : C' \rightarrow \text{Max}(C)$  (resp.  $g : \text{Min}(C) \rightarrow C'$ ) tel que  $g \circ f = \iota_{\text{max}}^C$  (resp.  $f \circ g = \iota_{\text{min}}^C$ ).*
- (cf §1.2) *Ceci conduit à un foncteur « idempotent »  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  (resp.  $\text{Min} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ).*

*Si l'on note  $\text{Max}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Min}(\mathcal{C})$ ) l'image essentielle de  $\text{Max}$  (resp.  $\text{Min}$ ), on a :*

- (cf proposition 1.2.6) *La corestriction  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Min} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Min}(\mathcal{C})$ ) est un adjoint à gauche (resp. à droite) du morphisme d'inclusion.*
- (cf proposition 1.2.7 et corollaire 1.3.2) *Les foncteurs  $\text{Max} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Max}(\mathcal{C})$  et  $\text{Min} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Min}(\mathcal{C})$  réalisent tous les deux la localisation de la catégorie  $\mathcal{C}$  par rapport aux morphismes  $f$  tels que  $T(f)$  est un isomorphisme. En particulier, les catégories  $\text{Max}(\mathcal{C})$  et  $\text{Min}(\mathcal{C})$  sont équivalentes et, concrètement, cette équivalence se réalise via les foncteurs  $\text{Min}$  et  $\text{Max}$ .*
- (cf proposition 1.2.8) *La restriction du foncteur  $T$  à  $\text{Max}(\mathcal{C})$  d'une part, et à  $\text{Min}(\mathcal{C})$  d'autre part est fidèle et conservative.*
- (cf proposition 1.3.4) *La dualité sur  $\mathcal{C}$  permute les catégories  $\text{Max}(\mathcal{C})$  et  $\text{Min}(\mathcal{C})$ . La composition de celle-ci avec le foncteur  $\text{Max}$  (resp.  $\text{Min}$ ) induit une dualité sur  $\text{Max}(\mathcal{C})$  (resp. sur  $\text{Min}(\mathcal{C})$ ) qui commute au foncteur  $T$ .*
- (cf proposition 1.5.2) *La catégorie  $\text{Max}(\mathcal{C})$  (resp.  $\text{Min}(\mathcal{C})$ ) est abélienne, les noyaux et conoyaux s'obtenant en appliquant le foncteur  $\text{Max}$  (resp.  $\text{Min}$ ) aux constructions correspondantes dans  $\mathcal{C}$ . La restriction du foncteur  $T$  à cette sous-catégorie est exacte.*

## 2 Application à la théorie de Hodge $p$ -adique

Nous reprenons à partir de maintenant les notations de l'introduction :  $p$  est un nombre premier,  $k$  un corps parfait de caractéristique  $p$ ,  $W$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ ,  $K_0$  son corps des fractions,  $K$  une extension totalement ramifiée de  $K_0$  de degré  $e$ . Fixons en outre  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$  et notons  $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$  le groupe de Galois absolu de  $K$ . Appelons  $\mathcal{O}_K$  (resp.  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ ) l'anneau des entiers de  $K$  (resp. de  $\bar{K}$ ). Soient également  $\pi$  une uniformisante de  $K$  et  $(\pi_n)$  (resp.  $(p_n)$ ) un système compatible de racines  $p^n$ -ièmes de  $\pi$  (resp. de  $p$ ). Soit  $G_1 \subset G_K$  le groupe de Galois absolu de l'extension  $K(\pi_1)$ .

Dans tout le reste de cet article, on fixe un entier  $r \in \{1, \dots, p-2\}$ . Nous préférons éviter dès à présent le cas  $r = 0$  car, bien que fondamentalement plus simple, il conduit souvent à des discussions assez peu intéressantes, et dans tous les cas, il vérifie certainement l'inégalité  $er < p-1$  et donc relève de l'étude menée dans [10]. Remarquons qu'ainsi, on peut supposer  $p > 2$  (sinon aucun  $r$  ne convient).

### 2.1 Rappel sommaire de la théorie de Breuil

On se borne dans cette sous-section à présenter les aspects « annulés par  $p$  » de la théorie de Breuil (développée de façon générale dans [2], [5] et [10]). Certaines définitions (ou constantes) que nous allons introduire sont motivées par les aspects entiers de cette théorie (qui n'apparaîtront que superficiellement dans cet article en 4.3) et pourront de fait paraître étrange au lecteur qui n'est pas familier. Pour palier ce manque, nous renvoyons aux articles précédemment cités.

#### Les catégories de modules

Posons  $\tilde{S} = k[u]/u^{ep}$ . Soit  $c \in \tilde{S}$  la réduction modulo  $p$  du coefficient constant de polynôme minimal sur  $K_0$  de l'uniformisante  $\pi$  fixée. On définit plusieurs catégories de modules sur  $\tilde{S}$ . Tout d'abord, une grosse catégorie  $\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (la notation deviendra claire en 3.1) dont les objets sont la donnée de :

1. un  $\tilde{S}$ -module  $\mathcal{M}$  ;
2. un sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$  contenant  $u^{er} \mathcal{M}$  ;
3. un opérateur (dit de Frobenius)  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  semi-linéaire par rapport au Frobenius (c'est-à-dire l'élévation à la puissance  $p$ ) sur  $\tilde{S}$  ;

4. un opérateur (dit de monodromie)  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant :
- (condition de Leibniz)  $N(ux) = uN(x) - ux$  pour tout  $x \in \mathcal{M}$  ;
  - (transversalité de Griffith)  $u^e N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$  ;
  - le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Les morphismes dans  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  sont sans surprise les applications  $\tilde{S}$ -linéaires qui commutent à toutes les structures supplémentaires. Pour tout entier  $t \leq r$ , l'anneau  $\tilde{S}$  lui-même muni de  $\text{Fil}^r \tilde{S} = u^{et} \tilde{S}$ , de  $\phi_r$  défini par  $\phi_r(u^{et}) = c^t$  et de l'opérateur  $N$  tel que  $N(1) = 0$  est un exemple d'objet de  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Avant de passer à la définition des autres catégories, signalons que l'on dispose d'une notion de suite exacte dans  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  : une suite d'objets de cette catégorie est dite exacte, si elle est exacte en tant que suite de  $\tilde{S}$ -modules, et si elle induit une suite exacte de  $\tilde{S}$ -modules au niveau des  $\text{Fil}^r$ .

Soit  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  la sous-catégorie pleine de  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  regroupant les objets  $\mathcal{M}$  pour lesquels  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$  comme  $\tilde{S}$ -module. La catégorie essentielle dont nous voulons mener l'étude est encore une sous-catégorie de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  ; c'est celle qui regroupe les objets  $\mathcal{M} \in '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  qui sont des  $\tilde{S}$ -modules libres de type fini. On la note  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (sans l'apostrophe donc).

### Foncteur vers Galois

La catégorie  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est munie d'un foncteur  $T_{\text{st}}$  vers la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  des  $\mathbb{F}_p$ -représentations du groupe  $G_K$ . Pour le définir, nous avons besoin d'introduire des anneaux de périodes : comme nous restons toujours dans le cas des représentations annulées par  $p$ , ces anneaux sont exceptionnellement faciles à décrire. Le premier d'entre eux est, en tant que  $k$ -algèbre,  $\hat{A}_0 = k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . Il est muni de l'action de  $G_K$  naturelle. De plus, pour  $0 \leq i \leq r$ , on définit  $\text{Fil}^i \hat{A}_0$  comme l'idéal principal engendré par  $1 \otimes p_1^i$  (où l'on rappelle que  $p_1$  est une racine  $p$ -ième de  $p$  fixée) : cela forme une filtration (finie) décroissante. On définit aussi pour les mêmes entiers  $i$  une application  $\phi_i : \text{Fil}^i \hat{A}_0 \rightarrow \hat{A}_0$  en envoyant  $1 \otimes p_1^i x$  sur la réduction modulo  $p$  de  $(-1)^i \otimes \hat{x}^p$  où  $\hat{x} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$  est un relevé quelconque de  $x$ . (On montre que le résultat ne dépend que de  $p_1^i x$ , et pas de  $x$  ni de son relevé  $\hat{x}$ .)

L'anneau qui nous intéressera le plus est  $\hat{A}$ , défini comme suit. En tant que  $k$ -algèbre, il vaut  $\hat{A}_0 \langle X \rangle$  où la notation  $\langle \cdot \rangle$  fait référence à l'algèbre polynomiale à puissance divisées. Il est muni d'un idéal  $\text{Fil}^r \hat{A}$  engendré par les produits  $\text{Fil}^{r-i} \hat{A}_0 \cdot X^i$  pour  $0 \leq i \leq r$  et par les  $\gamma_i(X) = \frac{X^i}{i!}$  pour  $i > r$ . On dispose également d'un morphisme  $\phi_r : \text{Fil}^r \hat{A} \rightarrow \hat{A}$  ; c'est celui qui envoie les éléments  $\gamma_i(X)$  ( $i > r$ ) sur 0 et l'élément  $aX^i$  ( $0 \leq i \leq r$ ,  $a \in \text{Fil}^{r-i} \hat{A}_0$ ) sur  $\phi_{r-i}(a)Y^i$  avec  $Y = \frac{(1+X)^p - 1}{p}$ , le calcul de cette dernière fraction se faisant bien entendu dans  $\mathbb{Z}_p[X]$  avant d'être réduit dans  $\hat{A}$ . L'action de  $G_K$  se prolonge à  $\hat{A}$  grâce à la formule  $g(X) = \frac{g(\pi_1)}{\pi_1}(1+X) - 1$ . Enfin  $\hat{A}$  apparaît comme une  $\tilde{S}$ -algèbre grâce au morphisme  $\tilde{S} \rightarrow \hat{A}$ ,  $u \mapsto \frac{\pi_1}{1+X}$ . Tout cela fait de  $\hat{A}$  un objet de  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , et on peut poser pour tout objet  $\mathcal{M} \in '\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(\mathcal{M}, \hat{A}).$$

On définit comme ceci un foncteur contravariant  $T_{\text{st}} : '\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ .

### Dualité

La catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est munie d'une dualité introduite dans le chapitre V de [9]. Rappelons que si  $\mathcal{M}$  en est un objet, son dual  $\mathcal{M}^*$  est défini comme suit :

1.  $\mathcal{M}^* = \text{Hom}_{\tilde{S}\text{-mod}}(\mathcal{M}, S)$  ;
2.  $\text{Fil}^r \mathcal{M}^* = \{f \in \mathcal{M}^* / f(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset u^{er} S\}$  ;

3. pour  $f \in \text{Fil}^r \mathcal{M}^*$ ,  $\phi_r^*(f)$  est l'unique application vérifiant  $\phi_r^*(f)(\phi_r(x)) = \phi_r \circ f(x)$  pour tout  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$  où  $\phi_r : u^{er} \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  est l'unique application semi-linéaire envoyant  $u^{er}$  sur  $c^r$  ;
4. pour  $f \in \mathcal{M}^*$ ,  $N^*(f) = N \circ f - f \circ N$ .

L'association  $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}^*$  définit une dualité dans le sens du paragraphe 1.3. De plus, par le théorème V.4.3.1 de *loc. cit.* et la remarque qui le suit :

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}^*) = T_{\text{st}}(\mathcal{M})^\vee(r) \quad (1)$$

où par définition «  $(r)$  » désigne le twist de Tate et où  $T^\vee$  est la représentation contragrédiente  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p\text{-mod}}(T, \mathbb{F}_p)$ . Autrement dit, si l'on muni la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  de la dualité  $T \mapsto T^* = T^\vee(r)$  le foncteur  $T_{\text{st}}$  vérifie l'axiome **(Ax4)**.

### Sans l'opérateur de monodromie

Il sera important dans la suite de considérer un analogue des objets précédents dans lequel l'opérateur de monodromie est omis. Ceci amène à définir tout d'abord la catégorie  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^\phi$  dont les objets sont les  $\tilde{S}$ -modules  $\mathcal{M}$  munis d'un  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  et d'un Frobenius  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  (mais *pas* d'un opérateur  $N$ ) vérifiant les mêmes axiomes que précédemment. On isole ensuite deux sous-catégories, à savoir  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$ ,  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$ , les définitions de celles-ci étant identiques à celles de leurs analogues.

Le morphisme  $\tilde{S} \rightarrow \hat{A}_0$ ,  $u \mapsto \pi_1$  fait de  $\hat{A}_0$  une  $\tilde{S}$ -algèbre et permet de voir  $\hat{A}_0$  comme un objet de  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^\phi$ . On définit alors

$$T_{\text{qst}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\text{Fil}_{/\tilde{S}}^\phi}(\mathcal{M}, \hat{A}_0)$$

pour  $\mathcal{M} \in '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$ . Il faut toutefois faire attention au point suivant : le module  $T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  n'est pas une représentation de  $G_K$ , mais seulement du sous-groupe  $G_1$  étant donné que le morphisme structural  $\tilde{S} \rightarrow \hat{A}_0$  n'est pas  $G_K$ -équivariant (mais seulement  $G_1$ -équivariant). On a malgré tout un lemme important qui permet de comparer les foncteurs  $T_{\text{st}}$  et  $T_{\text{qst}}$ .

**Lemme 2.1.1.** *Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$ . La projection  $\hat{A}_0$ -linéaire  $\hat{A} \rightarrow \hat{A}_0$ ,  $\gamma_n(X) \mapsto 0$  ( $n \geq 1$ ) induit un isomorphisme  $G_1$ -équivariant  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ .*

*Démonstration.* La preuve est une version simplifiée de celle du lemme 2.3.1.1 de [5] que l'on ne recopie pas. On notera par contre que celle-ci donne une formule explicite pour l'inverse  $T_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  : à  $f_0 \in T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ , on associe l'application  $f$  définie par

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_0(N^i(x)) \gamma_i(\log(1+X)) \quad (2)$$

où la somme converge pour la topologie « Fil-adique ». □

Ces catégories « sans  $N$  » sont intéressantes car elles admettent une description alternative plus simple. Soit  $\tilde{\mathfrak{S}} = k[[u]]$  que l'on munit d'un opérateur de Frobenius  $\phi : \tilde{\mathfrak{S}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{S}}$  qui agit comme l'élévation à la puissance  $p$ . Lorsque  $\mathfrak{M}$  est un module sur  $\tilde{\mathfrak{S}}$ , on notera  $\phi^* \mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{S}} \otimes_{(\phi), \tilde{\mathfrak{S}}} \mathfrak{M}$ . Introduisons  $'\text{Mod}_{/\tilde{\mathfrak{S}}}^\phi$  la catégorie dont les objets sont la donnée de :

1. un  $\tilde{\mathfrak{S}}$ -module  $\mathfrak{M}$  ;
2. un opérateur  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  tel que le conoyau de  $\text{id} \otimes \phi : \phi^* \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$  soit annulé par  $u^{er}$ .

Comme dans les cas précédents, définissons  $\text{Mod}_{/\tilde{\mathfrak{S}}}^\phi$  la sous-catégorie pleine de  $'\text{Mod}_{/\tilde{\mathfrak{S}}}^\phi$  formée des objets libres de type fini sur  $\tilde{\mathfrak{S}}$ . On peut alors construire une équivalence de catégories<sup>6</sup>  $M_{\tilde{\mathfrak{S}}} : \text{Mod}_{/\tilde{\mathfrak{S}}}^\phi \rightarrow \text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  qui jouit de propriétés intéressantes. En particulier, la composée  $T_{\tilde{\mathfrak{S}}} = T_{\text{qst}} \circ M_{\tilde{\mathfrak{S}}}$  a une expression simple : pour tout  $\mathfrak{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{\mathfrak{S}}}^\phi$ , on a un isomorphisme  $G_\infty$ -équivariant, canonique et fonctoriel

$$T_{\tilde{\mathfrak{S}}}(\mathfrak{M}) = \text{Hom}_{\tilde{\mathfrak{S}}, \phi}(\mathfrak{M}, k((u))^{\text{sep}}) \quad (3)$$

où  $k((u))^{\text{sep}}$  désigne une clôture séparable de  $k((u))$  et est muni du Frobenius usuel (l'élévation à la puissance  $p$ ). Dans cette dernière formule, l'action de  $G_\infty$  sur le Hom se fait par l'intermédiaire d'une action sur  $k((u))^{\text{sep}}$  qui provient de la théorie du corps des nombres. Il existe d'autres résultats concernant le foncteur  $M_{\tilde{\mathfrak{S}}}$  qui nous intéresseront particulièrement dans la suite. Nous les regroupons dans le théorème suivant.

<sup>6</sup>Comme les définitions précises de tous les objets qui interviennent ne nous seront pas vraiment utiles ici, nous ne nous attardons par plus sur le sujet et nous contentons de renvoyer par exemple à [13] pour une présentation succincte de la théorie.

**Théorème 2.1.2.** *Le foncteur  $M_{\tilde{S}}$  est une équivalence de catégories exacte. Tout quasi-inverse est également exact et, de plus, respecte les injections et les surjections.*

*Le foncteur  $T_{\tilde{S}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_1)$  est un pylonet additif et autodual et sa restriction à  $\text{Max}(\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi})$  est pleinement fidèle.*

*Démonstration.* La première assertion est une généralisation directe (déjà utilisée par ailleurs dans la littérature) d'un résultat de Breuil (théorème 4.1.1 de [4]). La phrase suivante concernant les injections et les surjections est prouvée dans la proposition 2.3.2 de [13]. Le second alinéa est, quant à lui, une version faible du résultat principal<sup>7</sup> de *loc. cit.*, même s'il n'est à aucun endroit écrit sous une forme aussi concise.  $\square$

## 2.2 Opérateur de monodromie et prolongement de l'action de Galois

Dans ce paragraphe, nous démontrons un résultat essentiel (proposition 2.2.2) qui précise les liens entre la donnée supplémentaire d'un opérateur de monodromie  $N$  et le prolongement de l'action de Galois de  $G_1$  à  $G_K$ . Les méthodes de démonstration (ainsi que les énoncés d'ailleurs) sont très largement inspirées de celles développées par Liu dans [21].

On rappelle que  $\pi_1 \in \mathcal{O}_K$  est une racine  $p$ -ième fixée de  $\pi$ . Pour tout  $\sigma \in G_K$ , on définit  $\varepsilon(\sigma)$  comme l'image dans  $\hat{A}_0$  du quotient  $\frac{\sigma\pi_1}{\pi_1}$ ; c'est une racine  $p$ -ième de l'unité, qui vaut 1 si  $\sigma \in G_1$ . On pose en outre

$$t(\sigma) = \sum_{i=1}^{p-2} \frac{(1 - \varepsilon(\sigma))^i}{i}.$$

(On remarque que  $(1 - \varepsilon(\sigma))^{p-1}$  s'annule dans  $\hat{A}_0$ , ce qui est en accord avec le fait que l'on arrête la somme à  $p-2$ .) Il est clair que si  $\sigma \in G_1$ , alors  $t(\sigma) = 0$ . Sinon,  $t(\sigma)$  est un élément de valuation  $\frac{1}{p-1}$  et vérifie donc en particulier  $t(\sigma)^{p-1} = 0$ . En outre,  $t$  définit un cocycle, i.e. il est soumis à la relation  $t(\sigma\sigma') = t(\sigma) + \sigma t(\sigma')$ , valable pour  $\sigma$  et  $\sigma'$  dans  $G_K$ .

Dans la suite, lorsque  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ , on sera amené à considérer le produit tensoriel  $\mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$  : il est naturellement muni d'un  $\text{Fil}^r$  (défini par  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$ ), d'un  $\phi_r$  (qui provient de l'application  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ) et d'une action de  $G_1$  (obtenue par son action naturellement sur le second facteur). Lorsque de surcroît  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , on prolonge l'action de  $G_1$  à  $G_K$  tout entier en utilisant l'opérateur de monodromie grâce à la formule

$$\sigma(x \otimes a) = \sum_{i=0}^{p-2} N^i(x) \otimes \sigma(a) \frac{t(\sigma)^i}{i!} \quad (4)$$

avec  $\sigma \in G_K$ ,  $x \in \mathcal{M}$  et  $a \in \hat{A}_0$ . En utilisant  $t(\sigma)^i t(\sigma')^j = 0$  pour  $i + j \geq p-1$ , on vérifie aisément que l'égalité (4) définit bien une action. De plus, on a la relation

$$N(x) \otimes t(\sigma) = \sum_{i=1}^{p-2} (-1)^{i-1} \frac{(\sigma-1)^i}{i} (x \otimes 1). \quad (5)$$

pour tout  $\sigma \in G_K$ . Fixons  $\tau$  un élément de  $G_K$  qui n'appartient pas à  $G_1$ ; avec  $G_1$ , il engendre  $G_K$  tout entier (puisque  $G_1$  est d'indice premier dans  $G_K$ ). Notons  $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$  et  $t = t(\tau)$  et posons pour finir  $\hat{A}_0^* = \hat{A}_0$  que l'on munit de  $\text{Fil}^r \hat{A}_0^* = \hat{A}_0^*$  et  $\phi_r = \phi$ . Comme dans la démonstration du théorème 4.3.4 de [21], on construit (de façon fonctorielle) des morphismes canoniques

$$\iota_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0 \rightarrow T_{\text{qst}}(\mathcal{M})^* \otimes_{\mathbb{F}_p} \hat{A}_0 \quad \text{et} \quad \iota_{\mathcal{M}}^* : T_{\text{qst}}(\mathcal{M})^* \otimes_{\mathbb{F}_p} \hat{A}_0^* \rightarrow \mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$$

compatibles à  $\text{Fil}^r$ ,  $\phi_r$  et l'action de  $G_1$  (resp.  $G_K$ ). En outre, ils sont soumis à la relation  $\iota_{\mathcal{M}} \circ \iota_{\mathcal{M}}^* = \text{id} \otimes t^r$ .

Toute cette artillerie permet de démontrer les deux propositions suivantes.

**Proposition 2.2.1.** *Soient  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  des objets de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ . On suppose que  $T_{\text{qst}}(f) : T_{\text{st}}(\mathcal{M}') \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est  $G_K$ -équivariant. Alors  $f$  commute à  $N$  (i.e.  $f$  est un morphisme dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ).*

<sup>7</sup>Le travail de [13] n'est pas valable seulement pour les objets annulés par  $p$ , pour une catégorie plus grosse d'objets annulés par une puissance de  $p$ .

*Démonstration.* La formule (5) implique que  $f$  commute à  $tN$  agissant sur les produits tensoriels  $\mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$  et  $\mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$ . Dans  $\hat{A}_0$ , écrivons  $t = qu^e$  où  $q$  est un élément de valuation  $\frac{1}{p(p-1)}$ . L'application  $g = f \circ (u^e N) - (u^e N) \circ f$  prend alors ses valeurs dans  $\mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} m_q$  où  $m_q$  est le noyau de la multiplication par  $q$  sur  $\hat{A}_0$ , c'est-à-dire l'idéal des éléments de valuation supérieure ou égale à  $1 - \frac{1}{p(p-1)}$ . Maintenant, pour  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , on a

$$\frac{1}{c} g \circ \phi_r(x) = \phi_r \circ (f \circ N - N \circ f)(x) \in \phi_r(\mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} m_q) \subset \mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \phi_r(m_q) = 0$$

la dernière égalité provenant d'un simple calcul de valuation. On en déduit, comme souhaité, que  $f$  et  $N$  commutent.  $\square$

**Proposition 2.2.2.** Soient  $\mathcal{M} \in {}^r\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ,  $\mathcal{M}' \in {}^r\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  et  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme surjectif dans  ${}^r\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ . On suppose que  $T_{\text{qst}}(\mathcal{M}')$  (identifié grâce à  $T_{\text{qst}}(f)$  à une sous- $G_1$ -représentation de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ) est stable par  $G_K$ . Alors, il existe sur  $\mathcal{M}'$  un unique opérateur de monodromie pour lequel  $f$  est un morphisme dans  ${}^r\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

On commence par démontrer deux lemmes.

**Lemme 2.2.3.** Pour tout  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ , on a  $\ker \iota_{\mathcal{M}} \subset t(\text{Fil}^r \mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0)$ .

*Démonstration.* Notons  $d$  le rang de  $\mathcal{M}$  sur  $\tilde{S}$ . Posons  $\mathcal{A} = \text{Fil}^r \mathcal{M} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$  et  $\mathcal{B} = \iota_{\mathcal{M}}(\mathcal{A})$ . En s'appuyant sur le fait que  $\hat{A}_0$  est un anneau de Bézout et sur l'inclusion  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$ , on montre que  $\mathcal{A}/t\mathcal{A}$  est libre de rang  $d$  sur  $k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\tilde{K}}/t$ . Par ailleurs, la compatibilité de  $\iota_{\mathcal{M}}^*$  à  $\text{Fil}^r$  montre que l'image de ce morphisme est incluse dans  $\mathcal{A}$ . De la relation  $\iota_{\mathcal{M}} \circ \iota_{\mathcal{M}}^* = \text{id} \otimes t^r$ , on déduit  $t^r(T_{\text{qst}}(\mathcal{M})^* \otimes_{\mathbb{F}_p} \hat{A}_0) \subset \mathcal{B}$ , d'où il suit, comme précédemment, que  $\mathcal{B}/t\mathcal{B}$  est aussi libre de rang  $d$  sur  $k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\tilde{K}}/t$ . L'application  $\iota_{\mathcal{M}}$  induit une surjection linéaire  $\mathcal{A}/t\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}/t\mathcal{B}$ . Comme les espaces de départ et d'arrivée sont des modules libres de même rang, c'est un isomorphisme et le lemme en découle.  $\square$

**Lemme 2.2.4.** Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme surjectif dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ). Alors  $\mathcal{K} = \ker f$  (avec les structures induites) est aussi dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ).

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ , l'opérateur de monodromie ne posant pas de problèmes. Étant donné ce que nous avons vu, le plus simple est de passer par l'équivalence avec  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ . D'après le théorème 2.1.2,  $f$  provient d'un morphisme surjectif  $g : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$  de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ . D'après la définition des objets de cette catégorie, il est clair que  $\ker g$  en est un objet. L'exactitude de  $M_{\tilde{S}}$  montre alors que  $M_{\tilde{S}}(\ker g)$  s'identifie à  $\mathcal{K}$ , d'où résulte le lemme.  $\square$

*Démonstration de la proposition 2.2.2.* Soit  $\mathcal{K}$  le noyau de  $f$ ; d'après le lemme 2.2.4, c'est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ . Pour conclure, il suffit de montrer qu'il est stable par  $N$ . L'hypothèse assure que  $T_{\text{qst}}(\mathcal{K})^*$  est stable par  $G_K$  dans  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})^*$ . On en déduit, en utilisant l'exactitude de  $T_{\text{qst}}$  et l'égalité (5), que  $tf \circ N(\mathcal{K}) \subset \ker \iota_{\mathcal{M}'}$ . Avec le lemme 2.2.3, on récupère  $tf \circ N(\mathcal{K}) \subset t(\text{Fil}^r \mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0)$ . On suit alors la méthode de démonstration utilisée pour la proposition 2.2.1 : dans  $\hat{A}_0$ , on peut écrire  $t = qu^e$  où  $q$  est un élément de valuation  $\frac{1}{p(p-1)}$ . En « divisant » la dernière inclusion par  $q$ , on obtient

$$f \circ (u^e N)(\mathcal{K}) \subset (\mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \ker m_q) + (u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0)$$

où  $m_q$  désigne la multiplication par  $q$  sur  $\hat{A}_0$ . On remarque que  $\ker m_q$  (resp.  $\text{Fil}^r S \cdot \hat{A}_0$ ) est formé des éléments de valuation supérieure ou égale à  $1 - \frac{1}{p(p-1)}$  (resp.  $\frac{r}{p}$ ). On en déduit  $\ker m_q \subset \text{Fil}^r S \cdot \hat{A}_0$ , puis  $\mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \ker m_q \subset u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$ . Ainsi  $f \circ (u^e N)(\mathcal{K}) \subset u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$ . Soit maintenant  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{K}$ . Posons  $y = \phi_r(x)$  et  $z = N(y)$ . Par ce qui précède :

$$cf(z) = f \circ (cN) \circ \phi_r(x) = f \circ \phi_r \circ (u^e N)(x) = \phi_r \circ f \circ (u^e N)(x) \in \phi_r(u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}' \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0) = 0$$

d'où  $f(z) = 0$ , i.e.  $z \in \mathcal{K}$  (car la flèche  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K} \otimes_{\tilde{S}} \hat{A}_0$  est injective). Puisque  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{K})$  engendre  $\mathcal{K}$ , on en déduit que  $\mathcal{K}$  est stable par  $N$  comme voulu.  $\square$



### Application : découpage par une sous-représentation

Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ), tout quotient de  $\mathcal{M}$  (dans cette catégorie) détermine une sous-représentation de  $T = T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  (resp.  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ). Nous donnons ici une construction dans l'autre sens : à partir d'une sous-représentation de  $T$ , on retrouve un quotient (en fait, l'unique quotient) de  $\mathcal{M}$  qui lui correspond.

**Proposition 2.2.5.** *Soient  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ) et  $T'$  une sous- $G_1$ -représentation de  $T = T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  (resp. une sous- $G_K$ -représentation de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ). Alors, il existe un unique quotient  $\mathcal{M}'$  de  $\mathcal{M}$  qui est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ) et pour lequel, en notant  $f$  la projection canonique  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ ,  $T_{\text{qst}}(f)$  (resp.  $T_{\text{st}}(f)$ ) s'identifie à l'inclusion  $T' \hookrightarrow T$ .*

*Démonstration.* On commence par traiter le cas des objets de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (i.e. sans monodromie). En utilisant l'équivalence avec  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$ , il revient au même de travailler dans cette dernière catégorie. Notons donc  $\mathfrak{M}$  l'objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  correspondant à  $\mathcal{M}$ . On rappelle que  $G_\infty$  est le sous-groupe de  $G_1$  correspondant à l'extension  $K_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K(\pi_n)$ . Nous allons utiliser la classification usuelle des représentations de  $G_\infty$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  telle que développée dans [16], §A.1 (pour une présentation bien plus succincte, on pourra se reporter à [13], §3.1). Soit  $M'$  le  $\phi$ -module sur  $k((u))$  associé à  $T'|_{G_\infty}$ . La donnée de l'inclusion  $T' \hookrightarrow T$  fait apparaître  $M'$  comme un quotient de  $M = \mathfrak{M}[1/u]$ . On note  $\mathfrak{M}'$  l'image de  $\mathfrak{M}$  dans  $M'$ . C'est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  dont la  $G_1$ -représentation associée s'identifie à  $T'$ , au moins en tant que  $G_\infty$ -représentation. Toutefois, comme l'inclusion  $T' \hookrightarrow T$  est par hypothèse  $G_1$ -équivariante, l'isomorphisme  $T_{\tilde{S}}(\mathfrak{M}') \simeq T'$  doit lui aussi être  $G_1$ -équivariant et l'existence est démontrée. L'unicité résulte de l'égalité  $\ker f = \bigcup_{h \in T'} \ker h$ , elle-même conséquence du lemme 2.1.5 de [13].

Le cas « avec monodromie » s'obtient directement en combinant ce que l'on vient de démontrer avec la proposition 2.2.2.  $\square$

**Corollaire 2.2.6.** *Les images essentielles de  $T_{\text{qst}}$  défini sur  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  et de  $T_{\text{st}}$  défini sur  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  sont stables par sous-objets et quotients.*

*Démonstration.* La stabilité par sous-objets est immédiate après la proposition 2.2.5. La stabilité par quotients s'obtient par dualité.  $\square$

Énonçons pour conclure ce paragraphe un corollaire de la proposition 2.2.5 qui nous sera utile à plusieurs reprises dans la suite.

**Corollaire 2.2.7.** *Soient  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ) et  $T'$  une sous- $G_1$ -représentation de  $T = T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  (resp. une sous- $G_K$ -représentation de  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ). On suppose  $(\bigcap_{h \in T'} \ker h) \subset u\mathcal{M}$ . Alors  $T = T'$ .*

*Démonstration.* La proposition 2.2.5 montre que  $T' \hookrightarrow T$  provient d'un morphisme surjectif  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ), alors que le lemme 2.2.4 assure que  $\mathcal{K} = \ker f$  est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ). Par ailleurs, on a clairement  $\mathcal{K} \subset \bigcap_{h \in T'} \ker h$ , d'où  $\mathcal{K} \subset u\mathcal{M}$ . Par liberté de  $\mathcal{K}$  sur  $\tilde{S}$ , ceci ne peut se produire que si  $\mathcal{K} = 0$ . Ainsi  $f$  est un isomorphisme et  $T = T'$ .  $\square$

## 2.3 Vérification des axiomes

On est à présent en mesure de montrer que le foncteur  $T_{\text{st}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  satisfait certains axiomes de la section 1. Plus précisément, nous allons montrer que ce foncteur est un pylonet additif et autodual en établissant **(Ax1)**, **(Ax2)**, **(Ax3a)**, **(Ax3b)**, **(Ax4)** et **(Ax5)**. En fait, **(Ax1)** est déjà connu (corollaire 2.3.3 de [13]), de même que **(Ax4)** que nous avons rappelé brièvement en 2.1. L'axiome **(Ax5)**, quant à lui, est immédiat, tandis que **(Ax3b)** résulte de la véracité de la proposition correspondant pour la fibration  $T_{\text{qst}}$ . Il ne reste donc qu'à prouver **(Ax2)** et **(Ax3a)**. C'est l'objet des deux propositions qui suivent.

**Proposition 2.3.1.** *La fibration  $T_{\text{st}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  vérifie l'axiome **(Ax2)**.*

*Démonstration.* Il faut prendre garde au fait que  $T_{\text{st}}$  est un foncteur contravariant. On rappelle que notre convention à ce propos est de le considérer comme un foncteur covariant de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  dans la catégorie opposée de  $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ . En particulier, **(Ax2)** signifie que  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  admet des *conoyaux* et que  $T_{\text{st}}$  transforme ceux-ci en noyaux. C'est ce que nous allons démontrer.

Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On note  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  et  $T' = T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ . Soit  $\mathcal{C}$  le quotient de  $\mathcal{M}'$  associé à  $K = \ker T_{\text{st}}(f) \subset T'$  par la correspondance de la proposition 2.2.5. Par définition, on a  $T_{\text{st}}(\mathcal{C}) = \ker T_{\text{st}}(f)$  et il suffit donc pour conclure de montrer que  $\mathcal{C}$  est un conoyau de  $f$  dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On considère pour cela  $\mathcal{X} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  muni d'un morphisme  $g : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{X}$  tel que  $g \circ f = 0$ . Notons  $\text{pr} : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{C}$  la projection canonique. Soit  $M_{\tilde{S}}$  un quasi-inverse de l'équivalence de catégories  $M_{\tilde{S}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi} \rightarrow \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ . Via l'identification  $T' = T_{\tilde{S}} \circ M_{\tilde{S}}(\mathcal{M}')$  (voir formule (3)), on peut voir les éléments de  $T'$  comme des morphismes de  $M_{\tilde{S}}(\mathcal{M}')$  dans  $k((u))^{\text{sep}}$ , et c'est ce que nous ferons. Le lemme 2.1.5 de [13] donne alors

$$\ker M_{\tilde{S}}(\text{pr}) = \bigcap_{h \in K} \ker h \quad \text{et} \quad \ker M_{\tilde{S}}(g) = \bigcap_{h \in L} \ker h$$

où  $L$  est l'image de  $T_{\text{st}}(g) : T_{\text{st}}(\mathcal{X}) \rightarrow T'$ . Du fait que  $g \circ f = 0$ , on déduit  $L \subset K$  et donc, par les formules précédentes, que  $\ker M_{\tilde{S}}(\text{pr}) \subset \ker M_{\tilde{S}}(g)$ . On en déduit que  $M_{\tilde{S}}(g)$  se factorise par  $M_{\tilde{S}}(\text{pr})$ . En appliquant  $M_{\tilde{S}}$ , on obtient un morphisme  $g' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{X}$  dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  tel que  $g' \circ \text{pr} = g$ . On remarque alors que  $T_{\text{qst}}(g')$  n'est rien d'autre que la corestriction à  $T'$  de  $T_{\text{qst}}(g) = T_{\text{st}}(g)$ . Ainsi  $T_{\text{qst}}(g)$  est  $G_K$ -équivariant et par la proposition 2.2.1,  $g'$  commute à  $N$ , i.e.  $g'$  est un morphisme dans la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Pour montrer la propriété universelle du conoyau, il ne reste plus qu'à justifier l'unicité de  $g'$  mais elle est claire une fois que l'on a remarqué que  $\text{pr}$  est surjectif.  $\square$

**Proposition 2.3.2.** *La fibration  $T_{\text{st}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  vérifie l'axiome (Ax3a).*

*Démonstration.* Soient  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de  $G_K$ , et  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  deux objets de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  munis d'une identification  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}_1) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M}_2) \simeq T$ . On pose  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$  et on définit  $\mathcal{M}'$  comme le quotient de  $\mathcal{M}$  attachée à la représentation diagonale de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \simeq T \oplus T$  via la correspondance de la proposition 2.2.5. Montrons que  $\mathcal{M}'$  est la somme directe de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  dans la fibre au-dessus de  $T$ .

Par construction,  $\mathcal{M}'$  est muni de morphismes  $f_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}'$  et  $f_2 : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}'$  (obtenus en plongeant d'abord  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  dans  $\mathcal{M}$ ) qui induisent des isomorphismes après application de  $T_{\text{st}}$ . Pour conclure, il suffit de montrer que si  $\mathcal{N}$  est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  munis de morphismes  $g_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{N}$  et  $g_2 : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{N}$  induisant des isomorphismes via  $T_{\text{st}}$ , alors il existe un unique morphisme  $h : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}'$  tel que  $h \circ f = g$  où  $f = f_1 \oplus (-f_2)$  et  $g = g_1 \oplus (-g_2)$ . Cela se fait de même que dans la preuve de la proposition 2.3.1.  $\square$

Pour récapituler, on a prouvé le théorème suivant :

**Théorème 2.3.3.** *La fibration  $T_{\text{st}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  est un pylonet (contravariant) additif et autodual. En particulier, tous les résultats du théorème 1.6.1 s'appliquent.*

**Définition 2.3.4.** On pose  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} = \text{Max}(\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N})$  et  $\text{Min}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} = \text{Min}(\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N})$ .

Terminons par quelques remarques en revenant tout d'abord un instant sur le cas de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  (i.e. sans  $N$ ). Via l'équivalence avec  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ , les travaux de [13] montrent que le foncteur  $\text{Max}$  s'interprète alors simplement comme l'extension des scalaires de  $\tilde{\mathfrak{S}}$  à  $\tilde{\mathfrak{S}}[1/u]$ . Le théorème 2.3.3 fournit donc en un certain sens un substitut à cette extension des scalaires (qui n'est en effet par réalisable directement ici étant donné que  $u$  est inversible). On peut se demander si emprunter ce chemin détourné est vraiment nécessaire, ou si au contraire, il n'existe pas une catégorie équivalente à  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  pour laquelle l'opération  $\text{Max}$  se réaliserait par un simple produit tensoriel. Le cas échéant, il serait intéressant de se demander en outre si ces nouveaux objets ont une interprétation cohomologique.

Une des conséquences du théorème 2.3.3 est le fait que la catégorie  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est abélienne. Un des intérêts que cela peut présenter est l'utilisation des méthodes (co)homologiques en lien avec cette catégorie. Hélas, cela ne peut se faire directement car  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  ne possède pas assez d'injectifs. Il s'agit par contre d'une catégorie dont tous les objets sont de longueur finie à laquelle on peut appliquer les méthodes de [24] :  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  se plonge de façon pleinement fidèle dans la catégorie des ind-objets  $\text{Ind}(\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N})$  dans laquelle on peut calculer les foncteurs dérivés de façon classique en utilisant des résolutions injectives.

## 2.4 Un résultat de pleine fidélité

**Théorème 2.4.1.** *La restriction du foncteur  $T_{\text{st}}$  à  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est pleinement fidèle.*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  deux objets de  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . On pose  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ,  $T' = T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ , et on suppose donné un morphisme  $G_K$ -équivariant  $g : T' \rightarrow T$ . En factorisant  $g$  par  $T' \twoheadrightarrow \text{im } g \hookrightarrow T$  et en se rappelant que l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$  est stable par sous-objets (corollaire 2.2.6), on se ramène à supposer successivement que  $g$  est injectif puis surjectif. Si  $g$  est injectif, la proposition 2.2.5 montre l'existence d'un morphisme  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}''$  dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  tel que  $T_{\text{st}}(f) = g$ . Le morphisme  $\text{Max}(f)$  relève alors  $g$  dans la catégorie  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . Le cas «  $g$  surjectif » s'obtient par dualité.  $\square$

### 3 Quelques formules explicites

La méthode que nous avons utilisée dans la section 2 pour démontrer le théorème 2.3.3 a l'avantage d'être efficace mais, en contrepartie, elle donne une présentation des objets construits (conoyaux, bornes supérieures dans une fibre) en termes de représentations galoisiennes. En un sens, ceci n'est pas satisfaisant car un des objectifs recherchés par l'introduction de la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  est de pouvoir faire des calculs entièrement du côté « algèbre linéaire » sans jamais avoir affaire aux représentations galoisiennes.

Cette section a pour but de remédier à ce problème. Pour cela, après avoir fait quelques développements sur le calcul des noyaux et conoyaux dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  en 3.1, nous construisons une nouvelle catégorie, notée  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ , d'objets que nous qualifions de  $T_{\text{st}}$ -réduits (sous-section 3.2). Nous montrons ensuite que cette catégorie est équivalente à  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  (sous-section 3.3) et nous explicitons enfin les constructions qui nous intéressent au niveau de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  (sous-section 3.4).

Finalement, dans une dernière partie, nous donnons encore une formule explicite qui permet de retrouver à partir d'une représentation galoisienne  $T$  appartenant à l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$ , l'objet maximal de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  (ou  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ) qui lui est associé.

#### 3.1 Deux adjonctions

On commence par introduire de nouvelles catégories encore plus vastes que les précédentes. La première d'entre elle est  $\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  (Uni pour « univers »). Elle regroupe les objets qui sont la donnée des points suivants :

1. un  $\tilde{S}$ -module  $\mathcal{M}$  ;
2. un  $\tilde{S}$ -module  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  muni d'un morphisme (pas nécessairement injectif)  $\iota : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  dont l'image contient  $u^{er} \mathcal{M}$  ;
3. un morphisme  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ;
4. des morphismes  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  et  $N_{\text{Fil}} : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}$  vérifiant :
  - (condition de Leibniz)  $N(ux) = uN(x) - ux$  pour tout  $x \in \mathcal{M}$  et  $N_{\text{Fil}}(ux) = uN_{\text{Fil}}(x) - ux$  pour tout  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$
  - les deux diagrammes suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{M} \\
N_{\text{Fil}} \downarrow & & \downarrow u^e N \\
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{M}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\
N_{\text{Fil}} \downarrow & & \downarrow cN \\
\text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M}
\end{array}
\tag{6}$$

Les morphismes dans  $\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  sont les paires  $(f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}', f_{\text{Fil}} : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}')$  qui sont compatibles à toutes les structures additionnelles. On isole la sous-catégorie pleine  $\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  de  $\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  qui regroupe les objets  $\mathcal{M}$  tels que  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$  comme  $\tilde{S}$ -module. On dispose du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} & & & & \text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} \\
& \searrow & & \nearrow & \\
& & \text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} & & 
\end{array}$$

où les flèches  $\hookrightarrow$  symbolisent des foncteurs pleinement fidèles. En outre, l'image de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  dans  $'\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (resp. de  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  dans  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ) est constituée des objets pour lesquels le morphisme  $\iota$  est injectif. Il est finalement facile de voir que le parallélogramme précédent est cartésien, c'est-à-dire que l'intersection (calculée dans  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ) des catégories  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $'\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  n'est autre que  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

Les notations  $\text{Gen}$  et  $\text{Fil}$  doivent maintenant être plus claires : on utilise  $\text{Gen}$  (comme « engendre » ou « generate ») pour désigner les objets sur lesquels l'image de  $\phi_r$  engendre tout, et  $\text{Fil}$  (comme « filtration ») pour les objets pour lesquels  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$  définit un véritable sous-module, c'est-à-dire pour lesquels l'application  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  est injective.

Le but de cette sous-section est de construire des adjoints aux quatre foncteurs d'inclusion que nous venons d'introduire. Étant donné que nous ne souhaitons pas nous limiter à une catégorie d'objets de type fini (en particulier pour les constructions menées en 3.5), la construction de ces adjonctions va reposer sur une induction transfinie. Si le lecteur n'est pas familier avec ce type de manipulations, et qu'il ne souhaite pas s'impliquer trop loin dans cette direction, nous l'invitons à supposer que tous les objets  $\mathcal{M}$  sont de type fini sur  $\tilde{S}$ , à remplacer systématiquement dans la suite le mot « ordinal » (resp. « induction transfinie ») par la locution « entier naturel » (resp. « récurrence »), et à ignorer tout ce qui concerne les ordinaux limites. L'hypothèse de type finitude, combinée au fait que  $\tilde{S}$  soit un anneau artinien, entraîne que toutes les constructions itératives que nous allons entreprendre se stabilisent au bout d'un nombre fini (et pas transfini) d'étapes.

### Le foncteur $\text{Gen}$

Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On définit par induction transfinie une suite décroissante  $(\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}))$  (indexée par les ordinaux  $\alpha$ ) de sous-objets (dans  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ) de  $\mathcal{M}$ . Pour  $\alpha = 0$ , on pose simplement  $\text{Gen}_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ . Si  $\alpha$  est un ordinal limite, on pose  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}) = \bigcap_{\beta < \alpha} \text{Gen}_\beta(\mathcal{M})$  et  $\text{Fil}^r \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}) = \bigcap_{\beta < \alpha} \text{Fil}^r \text{Gen}_\beta(\mathcal{M})$ . Finalement, si  $\alpha = \beta + 1$  est un ordinal successeur,  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$  est le sous- $\tilde{S}$ -module engendré par  $\phi_r(\text{Fil}^r \text{Gen}_\beta(\mathcal{M}))$  (qui est bien un sous-module de  $\text{Gen}_\beta(\mathcal{M})$  puisque, par construction,  $\text{Gen}_\beta(\mathcal{M})$  est un objet de  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ). On le munit de  $\text{Fil}^r \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}) = \iota^{-1}(\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}))$ . Par construction l'application  $\phi_r$  envoie  $\text{Fil}^r \text{Gen}_\beta(\mathcal{M})$  dans  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$  et donc induit bien par restriction un morphisme  $\phi_r : \text{Fil}^r \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$ . De même, par définition de  $\text{Fil}^r \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$ , le morphisme  $\iota$  envoie  $\text{Fil}^r \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$  dans  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$ . Les diagrammes (6) impliquent dans l'ordre que  $N$  stabilise  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$  puis que  $N_{\text{Fil}}$  stabilise  $\text{Fil}^r \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$ . On a ainsi bien défini un objet  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$  de  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , ce qui termine notre induction transfinie.

Les propriétés usuelles des ordinaux impliquent que la suite  $(\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}))$  est stationnaire. On appelle  $\text{Gen}(\mathcal{M})$  la valeur limite atteinte par cette suite. Il est alors clair que  $\phi_r(\text{Fil}^r \text{Gen}(\mathcal{M}))$  engendre  $\text{Gen}(\mathcal{M})$ , c'est-à-dire que  $\text{Gen}(\mathcal{M})$  est un objet de  $'\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Par induction transfinie, on montre qu'un morphisme  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  induit par restriction des flèches  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}')$  pour tout ordinal  $\alpha$ , et donc finalement un morphisme  $\text{Gen}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Gen}(\mathcal{M}')$ . On obtient ainsi des foncteurs  $\text{Gen}_\alpha : '\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow '\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  pour tout ordinal  $\alpha$  et un foncteur limite  $\text{Gen} : '\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow '\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Par ailleurs, il est facile de voir que la restriction de  $\text{Gen}$  à  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  prend ses valeurs dans  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

**Lemme 3.1.1.** *Le foncteur  $\text{Gen} : '\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow '\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (resp.  $\text{Gen} : '\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ) est un adjoint à droite de l'inclusion canonique  $'\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \hookrightarrow '\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (resp.  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \hookrightarrow '\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ).*

*Démonstration.* On ne donne la preuve que pour les catégories  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $'\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , l'autre cas étant absolument semblable. Soient  $\mathcal{M} \in '\text{Gen}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $\mathcal{M}' \in '\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Il suffit de montrer que tout morphisme  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  se factorise de façon unique par  $\text{Gen}(\mathcal{M}')$ . L'unicité résulte de ce que les flèches  $\text{Gen}(\mathcal{M}') \rightarrow \mathcal{M}'$  et  $\text{Fil}^r \text{Gen}(\mathcal{M}') \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}'$  sont injectives. Pour l'existence, il suffit de remarquer que  $\text{Gen}(f)$  permet cette factorisation.  $\square$

**Corollaire 3.1.2.** *La catégorie  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  admet des noyaux.*

*Démonstration.* Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Le noyau au sens usuel de  $f$ , disons  $\mathcal{K}$ , hérite par restriction des structures supplémentaires de  $\mathcal{M}$  : on pose  $\text{Fil}^r \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}$ , et on vérifie directement

$\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$  et  $N(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ . On obtient comme ci un objet de  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Le lemme 3.1.1 assure alors que  $\text{Gen}(\mathcal{K})$  est un noyau de  $f$  dans la catégorie  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .  $\square$

Il existe une version légèrement plus précise du corollaire précédent. Elle dit que la catégorie  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  admet des noyaux (ceux-ci sont construits de la manière naïve) et que si  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  est un morphisme de  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  qui admet pour noyau  $\mathcal{K}$ , alors  $\text{Gen}(f)$  admet pour noyau  $\text{Gen}(\mathcal{K})$  dans la catégorie  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On prendra garde par contre au fait que ceci n'implique aucune exactitude (au sens des suites exactes dans  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ) pour le foncteur  $\text{Gen}$ . On a toutefois, à ce sujet, le résultat très partiel suivant :

**Lemme 3.1.3.** *Soit  $0 \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow 0$  une suite exacte dans  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On suppose qu'il existe un ordinal  $\alpha$  tel que  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}') = 0$ . Alors pour tout ordinal  $\beta$ , on a  $\text{Gen}_{\alpha+\beta}(\mathcal{M}) \subset \text{Gen}_\beta(\mathcal{M}'')$ .*

*Démonstration.* Il suffit de prouver le lemme pour  $\beta = 0$ , les autres cas se déduisant de celui-ci par une induction transfinie immédiate. Or l'image de  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M})$  dans  $\mathcal{M}'$  est contenue dans  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}')$  qui est nul par hypothèse. Ainsi  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'' = \text{Gen}_0(\mathcal{M}'')$ , comme voulu.  $\square$

**Corollaire 3.1.4.** *Si  $0 \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow 0$  est une suite exacte et si  $\text{Gen}(\mathcal{M}') = \text{Gen}(\mathcal{M}'') = 0$ , alors  $\text{Gen}(\mathcal{M}) = 0$ .*

*Démonstration.* L'hypothèse  $\text{Gen}(\mathcal{M}') = \text{Gen}(\mathcal{M}'') = 0$  implique l'existence d'ordinaux  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $\text{Gen}_\alpha(\mathcal{M}') = 0$  et  $\text{Gen}_\beta(\mathcal{M}'') = 0$ . Par le lemme précédent  $\text{Gen}_{\alpha+\beta}(\mathcal{M}) = 0$  et la corollaire en résulte.  $\square$

## Le calcul de $\text{Gen}(\hat{A})$

Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , on a  $\text{Gen}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ , ce qui entraîne  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(\mathcal{M}, \text{Gen}(\hat{A}))$ .

Il semble donc intéressant de calculer  $\text{Gen}(\hat{A})$ , et c'est ce que nous nous proposons de faire ci-après comme premier exercice de manipulation du foncteur  $\text{Gen}$ . Cerise sur le gâteau, nous allons constater qu'il a une structure très simple.

Du fait que tout élément de  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$  possède certainement une racine  $p$ -ième, on déduit que  $\phi_i : \text{Fil}^i(k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \rightarrow k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$  est surjectif. De la description de l'action du Frobenius sur  $\hat{A}$  donnée lors de la définition, il suit

$$\phi_r(\text{Fil}^r \hat{A}) = \sum_{i=0}^r (k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \cdot Y^i \subset \hat{A}.$$

Par définition  $\text{Gen}_1(\hat{A})$  est le sous- $\tilde{S}$ -module de  $\hat{A}$  engendré par  $\phi_r(\text{Fil}^r \hat{A})$ . Ainsi si l'on note  $\hat{S}$  l'image du morphisme naturel  $\tilde{S} \otimes_k \hat{A}_0 \rightarrow \hat{A}$ , on a  $\text{Gen}_1(\hat{A}) = \sum_{i=0}^r \hat{S} \cdot Y^i$ . Il s'agit maintenant de calculer les itérés suivants, mais par chance, cela est assez simple. En effet, on remarque que l'élément  $(1 \otimes \pi_1^{r-i})Y^i$  est simultanément dans  $\text{Gen}_1(\hat{A})$  et dans  $\text{Fil}^r \hat{A}$ . De plus  $\phi_r((1 \otimes \pi_1^{r-i})Y^i) = (-1)^{r-i}Y^i$ . Ceci entraîne  $\text{Gen}_2(\hat{A}) \supset \text{Gen}_1(\hat{A})$  puis l'égalité, l'inclusion réciproque étant contenue dans la définition. Ainsi la suite des  $\text{Gen}_\alpha(\hat{A})$  est stationnaire à partir de  $\alpha = 1$ . L'expression de  $\text{Gen}(\hat{A})$  en résulte directement

$$\text{Gen}(\hat{A}) = \text{Gen}_1(\hat{A}) = \sum_{i=0}^r \hat{S} \cdot Y^i.$$

Le lemme suivant termine de préciser la structure algébrique de  $\text{Gen}(\hat{A})$ .

**Lemme 3.1.5.** *La famille des  $Y^i$  ( $0 \leq i \leq r$ ) est libre sur  $\hat{S}$ . Ainsi,  $\text{Gen}(\hat{A})$  est un  $\hat{S}$ -module libre de rang  $r+1$  de base  $(Y^i)_{0 \leq i \leq r}$ .*

*Démonstration.* Nous montrons un résultat légèrement plus fort, à savoir la liberté sur un anneau plus gros  $\hat{B}$ . Cet anneau est défini comme la sous- $(k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$ -algèbre de  $\hat{A}$  engendrée par  $X$ . Il est isomorphe à  $(k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p)[X]/X^p$  et fait de  $\hat{A}$  un  $\hat{B}$ -module libre de base  $(\gamma_{pj}(X))_{j \geq 0}$ . Par ailleurs, un calcul direct montre que sur cette base  $Y^i$  (pour  $0 \leq i \leq r$ ) n'a de composantes non nulles que pour  $j \leq i$ , et que la composante en  $j = i$  est inversible (c'est un élément non nul de  $\mathbb{F}_p$ ). La conclusion en découle.  $\square$

*Remarque.* De ce qui précède, il résulte sans mal que l'image de  $\phi_r : \text{Fil}^r \text{Gen}(\hat{A}) \rightarrow \text{Gen}(\hat{A})$  est le sous  $(k \otimes_{(\phi), k} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$ -module (libre) engendré par les  $Y^i$  avec  $0 \leq i \leq r$ .

## Le foncteur Fil

De façon assez semblable à ce qui vient d'être fait, on construit maintenant un foncteur  $\text{Fil} : {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow {}^{\text{Fil}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Soit  $\mathcal{M} \in {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On définit par induction une suite transfinie  $(\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}))$  de quotients successifs de  $\mathcal{M}$ . On pose tout d'abord  $\text{Fil}_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ .

Supposons que  $\alpha = \beta + 1$  soit un ordinal successeur. Notons  $K$  le noyau de  $\iota : \text{Fil}^r \text{Fil}_\beta(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\beta(\mathcal{M})$  et  $Q$  le sous- $\tilde{S}$ -module de  $\text{Fil}_\beta(\mathcal{M})$  engendré par  $\phi_r(K)$ . Définissons :

$$\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) = \frac{\text{Fil}_\beta(\mathcal{M})}{Q} \quad \text{et} \quad \text{Fil}^r \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) = \frac{\text{Fil}^r \text{Fil}_\beta(\mathcal{M})}{K}.$$

Par construction,  $\phi_r : \text{Fil}^r \text{Fil}_\beta(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\beta(\mathcal{M})$  se factorise en un morphisme  $\phi_r : \text{Fil}^r \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$ . En outre,  $\iota$  induit une application (injective)  $\text{Fil}^r \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\beta(\mathcal{M})$  que l'on peut composer avec la projection canonique  $\text{Fil}_\beta(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$  pour obtenir un nouveau morphisme  $\iota : \text{Fil}^r \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$ . La commutation des diagrammes (6) implique dans l'ordre  $N_{\text{Fil}}(K) \subset K$  puis  $N(Q) \subset Q$ . On en déduit des opérateurs  $N_{\text{Fil}}$  et  $N$  agissant respectivement sur les quotients  $\text{Fil}^r \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$  et  $\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$  dont il est facile de vérifier qu'ils font encore commuter les diagrammes (6). Bref, on obtient comme cela un objet  $\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) \in {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  muni d'un morphisme surjectif  $\text{Fil}_\beta(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$ . Ceci montre que  $\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$  apparaît comme un quotient de  $\text{Fil}_\beta(\mathcal{M})$  et donc aussi de  $\mathcal{M}$ .

Finalement, si  $\alpha$  est un ordinal limite, on pose simplement  $\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) = \varinjlim_{\beta < \alpha} \text{Fil}_\beta(\mathcal{M})$ . La suite des  $\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M})$  est stationnaire, et sa limite, notée  $\text{Fil}(\mathcal{M})$ , est nécessairement un objet de  ${}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  sur lequel  $\iota$  est injectif, c'est-à-dire un objet de  ${}^{\text{Fil}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Par ailleurs, si  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  est un morphisme dans  ${}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , on vérifie par induction transfinie qu'il induit pour tout ordinal  $\alpha$  un morphisme  $\text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}_\alpha(\mathcal{M}')$  et donc, par passage à la limite, une flèche  $\text{Fil}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Fil}(\mathcal{M}')$ . Ainsi, obtient-on pour tout ordinal  $\alpha$  un foncteur  $\text{Fil}_\alpha : {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , ainsi qu'un foncteur  $\text{Fil} : {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow {}^{\text{Fil}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Le fait que  $\text{Fil}(\mathcal{M})$  apparaisse comme un quotient de  $\mathcal{M}$  montre que  $\text{Fil}$  stabilise la catégorie  ${}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Ainsi, il induit par restriction un foncteur  $\text{Fil} : {}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow {}^{\text{Mod}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

**Lemme 3.1.6.** *Le foncteur  $\text{Fil} : {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow {}^{\text{Fil}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (resp.  $\text{Fil} : {}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow {}^{\text{Mod}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ) est un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion  ${}^{\text{Fil}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \hookrightarrow {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  (resp.  ${}^{\text{Mod}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \hookrightarrow {}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ).*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{M} \in {}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $\mathcal{M}' \in {}^{\text{Fil}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Il suffit de montrer que tout morphisme  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  se factorise de façon unique par  $\text{Fil}(\mathcal{M})$ . L'unicité résulte de ce que la flèche  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}(\mathcal{M})$  est surjective (sur les modules sous-jacents et sur les  $\text{Fil}^r$ ). Pour l'existence, on remarque que  $\text{Fil}(\mathcal{M}') = \mathcal{M}'$  puis que le morphisme  $\text{Fil}(f)$  convient. On raisonne de même avec les catégories  ${}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  ${}^{\text{Fil}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.7.** *La catégorie  ${}^{\text{Mod}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  admet des conoyaux.*

*Démonstration.* En vertu du lemme 3.1.6, il suffit de montrer que  ${}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  admet des conoyaux. Soit donc  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans  ${}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On note  $\mathcal{C}$  (resp.  $\text{Fil}^r \mathcal{C}$ ) le conoyau du morphisme sous-jacent à  $f$  (resp. du morphisme donné par  $f$  sur les  $\text{Fil}^r$ ). Il est alors aisé de vérifier que les structures supplémentaires sur  $\mathcal{M}'$  passent au quotient pour faire de  $\mathcal{C}$  un objet de  ${}^{\text{Uni}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  qui, est en fait dans  ${}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .  $\square$

*Remarque.* Si  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  est strictement compatible à  $\text{Fil}^r$  dans le sens où  $f(\text{Fil}^r \mathcal{M}) = f(\mathcal{M}) \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}'$ , alors le conoyau de  $f$  calculé dans  ${}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est déjà un objet de  ${}^{\text{Mod}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

Terminons par un dernier résultat important concernant le foncteur  $\text{Fil}$ .

**Lemme 3.1.8.** *Pour tout objet  $\mathcal{M} \in {}^{\text{Gen}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , on a une identification canonique et fonctorielle :*

$$T_{\text{st}}(\text{Fil}(\mathcal{M})) = \text{Hom}_{\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(\mathcal{M}, \hat{A}).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du lemme 3.1.6.  $\square$

**Corollaire 3.1.9.** *Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans  ${}^{\text{Mod}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Si  $\mathcal{C}$  désigne son conoyau (dans  ${}^{\text{Mod}}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ), alors  $T_{\text{st}}(\mathcal{C})$  est le noyau de  $T_{\text{st}}(f) : T_{\text{st}}(\mathcal{M}') \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ .*

## Sans la monodromie

Bien entendu, tout ce qui vient d'être fait peut se refaire sans difficulté supplémentaire avec les objets « sans  $N$  ». On notera  $'\text{Gen}_{/\tilde{S}}^\phi$ ,  $'\text{Fil}_{/\tilde{S}}^\phi$  et  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^\phi$  les catégories obtenues et encore  $\text{Gen}$  et  $\text{Fil}$  les foncteurs adjoints. Ceci ne prête pas à confusion car on vérifie facilement que ces foncteurs commutent aux foncteurs d'oubli.

## 3.2 Éléments nilpotents et objets réduits

On introduit ici la catégorie  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  qui va être amené à jouer un grand rôle dans la suite.

**Définition 3.2.1.** Soit  $\mathcal{M} \in '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . Un élément  $x \in \mathcal{M}$  est  $T_{\text{st}}\text{-nilpotent}$  si  $f(x) = 0$  pour tout  $f \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . L'ensemble des éléments  $T_{\text{st}}\text{-nilpotents}$  de  $\mathcal{M}$  est noté  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M})$ .

Le module  $\mathcal{M}$  est dit  $T_{\text{st}}\text{-réduit}$  si  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M}) = 0$ .

*Remarque.* Les définitions précédentes auraient un sens pour une catégorie plus générale que  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ , mais finalement que peu d'intérêt pour les applications que nous souhaitons développer ici. Pour simplifier un peu la présentation, nous nous restreignons donc au cas de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ .

On vérifie sans mal que cette construction définit un foncteur  $\text{Nil}_{\text{st}} : '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} \rightarrow '\text{Fil}_{/\tilde{S}}^\phi$ . Soit  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  le quotient de  $\mathcal{M}$  par  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . Les structures supplémentaires sur  $\mathcal{M}$  passent au quotient et font de  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  un objet de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . De plus, l'application de passage au quotient  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  induit un isomorphisme  $T_{\text{st}}(\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . Il en résulte que  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est un objet  $T_{\text{st}}\text{-réduit}$ , ou si l'on préfère que  $\text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Réd}_{\text{st}} = \text{Réd}_{\text{st}}$ . L'objet  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est appelé le  $T_{\text{st}}\text{-réduit}$  de  $\mathcal{M}$ .

On note  $'\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  (resp.  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ) la sous-catégorie pleine de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  qui regroupe les objets  $T_{\text{st}}\text{-réduits}$  (resp.  $T_{\text{st}}\text{-réduits}$  et de type fini sur  $S$ ). On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} & \hookrightarrow & '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} \\ \text{Réd}_{\text{st}} \downarrow & & \downarrow \text{Réd}_{\text{st}} \\ \text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} & \hookrightarrow & '\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} \end{array} \quad (7)$$

où les flèches  $\hookrightarrow$  symbolisent les inclusions et la flèche  $\rightarrow$  un foncteur essentiellement surjectif. Par un argument analogue à celui utilisé dans la preuve du lemme 3.1.6, on obtient :

**Lemme 3.2.2.** Le foncteur  $\text{Réd}_{\text{st}} : '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N} \rightarrow '\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  est un adjoint à gauche du foncteur d'inclusion.

**Corollaire 3.2.3.** Les catégories  $'\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  et  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  admettent des conoyaux. De plus, si  $f$  est un morphisme dans une de ces deux catégories, et si  $\mathcal{C}$  est le conoyau de  $f$ , alors  $T_{\text{st}}(\mathcal{C})$  s'identifie au noyau de  $T_{\text{st}}(f)$ .

*Démonstration.* Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans  $'\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . Le corollaire 3.1.7 assure que  $f$  admet un conoyau  $\mathcal{C}$  dans  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . Le lemme 3.2.2 montre que  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{C})$  est un conoyau de  $f$  dans  $'\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . Par ailleurs, si  $\mathcal{M}'$  est de type fini, il en est de même de  $\mathcal{C}$  puis de  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{C})$  puisque ce sont des quotients successifs de  $\mathcal{M}'$ . Donc, si  $f$  est un morphisme dans  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ , son conoyau dans  $'\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  est un objet de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . Ainsi  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  admet, elle aussi, des conoyaux.

La propriété de compatibilité au foncteur  $T_{\text{st}}$  résulte du corollaire 3.1.9 et de l'identification canonique  $T_{\text{st}}(\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{C})) \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{C})$ .  $\square$

## Sans la monodromie

Évidemment, il est possible de rejouer la chanson en omettant partout l'opérateur  $N$ . Si  $\mathcal{M}$  est un objet de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$ , on dit que  $x \in \mathcal{M}$  est  $T_{\text{qst}}\text{-nilpotent}$  si  $f(x) = 0$  pour tout  $f \in T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ ; on note  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  l'ensemble des éléments  $T_{\text{qst}}\text{-nilpotents}$  et  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ . La projection canonique  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  est envoyé sur un isomorphisme par le foncteur  $T_{\text{qst}}$ . Les équivalents du lemme 3.2.2 et du corollaire 3.2.3 sont encore vrais dans ce contexte et on définit de façon analogue les catégories  $'\text{Réd}_{/\tilde{S}}^\phi$  et  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^\phi$ ; elles apparaissent dans un diagramme analogue à (7).

Question terminologie, un objet  $\mathcal{M}$  pour lequel  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) = 0$  est dit  $T_{\text{qst}}$ -réduit et  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  est encore appelé le  $T_{\text{qst}}$ -réduit de  $\mathcal{M}$ . Malheureusement, si  $N$  est un objet de  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , les notions «  $T_{\text{qst}}$ -nilpotent » et «  $T_{\text{st}}$ -nilpotent » ne coïncident pas ; il est donc nécessaire de faire la distinction dans l'écriture et la terminologie. On a malgré tout le lemme suivant.

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $\mathcal{M} \in '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Alors*

$$\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{M} / \forall i \geq 0, N^i(x) \in \text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})\}.$$

*En particulier  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M}) \subset \text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  et la projection  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  se factorise par  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$ .*

*De plus  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M}))$  est l'image de  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  dans  $\text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$ , et  $\text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ .*

*Démonstration.* La première partie du lemme est une conséquence directe du lemme 2.1.1 et de la remarque faite dans sa démonstration. De  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M}) \subset \text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ , on déduit que la projection  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  induit un isomorphisme après application de  $T_{\text{qst}}$ . La dernière partie du lemme résulte facilement de cette remarque.  $\square$

### 3.3 Des équivalences de catégories

Le but de cette sous-section est de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 3.3.1.** *Les foncteurs  $\text{Réd}_{\text{qst}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi} \rightarrow \text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  et  $\text{Réd}_{\text{st}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow \text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  sont des équivalences de catégories.*

*Remarque.* Combiné à ce qui a été développé précédemment, ce théorème permet de construire un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ) à partir de n'importe quel objet de type fini de  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  (resp.  $'\text{Uni}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ), simplement en lui appliquant successivement les foncteurs  $\text{Fil}$ ,  $\text{Gen}$ ,  $\text{Réd}_{\text{qst}}$  (resp.  $\text{Réd}_{\text{st}}$ ) puis  $\text{Réd}_{\text{qst}}^{-1}$  (resp.  $\text{Réd}_{\text{st}}^{-1}$ ). Ceci nous sera particulièrement utile dans la suite pour mener à bien un certain nombre de constructions.

#### Définition des quasi-inverses

Soit  $\text{Mod}_{\text{qst}} : \text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi} \rightarrow \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  le foncteur défini par la formule usuelle :

$$\text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) = \tilde{S} \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} \frac{\text{Fil}^r \mathcal{M}}{u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}}$$

les structures additionnelles s'obtenant comme suit. Remarquons tout d'abord que l'on dispose d'un morphisme  $\tilde{S}$ -linéaire  $\text{pr} = \text{id} \otimes \phi_r : \text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ . Celui-ci est surjectif puisque par hypothèse  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$ . On pose  $\text{Fil}^r \text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) = \text{pr}^{-1}(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  et  $\phi_r(x) = 1 \otimes \text{pr}(x)$  pour  $x \in \text{Fil}^r \text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ . Ainsi,  $\text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  est un objet  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ , qui est bien entendu de type fini de  $\tilde{S}$ . Il reste à voir qu'il est bien dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ , c'est-à-dire qu'il est libre sur  $\tilde{S}$ . Cela résulte directement de la proposition 3.3.3 (ci-dessous) dont la démonstration est basée sur le lemme suivant.

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $y \in \text{Fil}^r \hat{A}_0$ . On suppose  $\phi_r(y) \neq 0$ . Alors  $u^{e-1}y \neq 0$ .*

*Démonstration.* Comme  $\phi_r(y)$  est non nul,  $y$  est lui-même non nul et possède une valuation  $p$ -adique  $v$  bien définie (on rappelle que  $\hat{A}_0$  est isomorphe en tant qu'anneau à  $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ ). De  $\phi_r(y) \neq 0$ , il découle  $pv - r < 1$ . Il s'ensuit  $v < \frac{r+1}{p} \leq 1 - \frac{1}{p}$  puis  $u^{e-1}y = \pi_1^{e-1}y \neq 0$ .  $\square$

**Proposition 3.3.3.** *Soit  $\mathcal{M} \in \text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ . Alors  $\text{Fil}^r \mathcal{M}/u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$  est libre sur  $k[u]/u^e$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\mathcal{M}$  est de type fini, il existe un  $k[[u]]$ -module libre de rang fini  $\hat{\mathcal{M}}$  muni d'un morphisme surjectif  $\text{pr} : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ . On peut en outre supposer que  $\hat{\mathcal{M}}$  est de rang minimal, ce qui entraîne facilement *via* la théorie des diviseurs élémentaires que  $\ker \text{pr} \subset u\hat{\mathcal{M}}$ , c'est-à-dire que  $\text{pr}$  induit un isomorphisme  $\hat{\mathcal{M}}/u\hat{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{M}/u\mathcal{M}$ . Notons  $d$  le rang de  $\hat{\mathcal{M}}$ . Soit  $\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$  l'image réciproque par  $f$  de  $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ . Il existe  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d$  une base de  $\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$  et des entiers  $n_1, \dots, n_d$  tels que  $u^{n_1}\hat{x}_1, \dots, u^{n_d}\hat{x}_d$  soit une base de  $\ker \text{pr}$ . Soit  $x_i \in \mathcal{M}$  l'image de  $\hat{x}_i$ . Du fait que  $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$  engendre  $\mathcal{M}$ , on déduit que la famille des  $\phi_r(x_i) \pmod{u}$  engendre  $\mathcal{M}/u\mathcal{M}$ . Comme elle est de cardinal  $d$ , elle en est une base. En particulier, aucun des  $\phi_r(x_i)$  n'est nul. Comme  $\mathcal{M}$  est  $T_{\text{qst}}$ -réduit, il existe pour tout  $i$ , un élément  $f_i \in T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  tel que  $f_i(\phi_r(x_i)) \neq 0$ . Fixons un indice  $i$  et posons  $y = f_i(x_i) \in \text{Fil}^r \hat{A}_0$ . On a  $\phi_r(y) \neq 0$ , et donc par le lemme 3.3.2,  $f_i(u^{e-1}x_i) = u^{e-1}y \neq 0$ . On en déduit que  $u^{e-1}x_i$  est lui-même non nul, i.e.  $u^{e-1}\hat{x}_i \notin \ker \text{pr}$ . Ainsi  $n_i \geq e$ , et comme ceci est vrai pour tout  $i$ , la proposition est démontrée.  $\square$



On peut procéder de même lorsque l'opérateur de monodromie est présent : à un objet  $\mathcal{M}$  de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , on associe  $\text{Mod}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  défini par les mêmes formules que  $\text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  auxquelles on ajoute  $N(s \otimes x) = c^{-1} \otimes u^e N(x) - us' \otimes x$  ( $s \in \tilde{S}$ ,  $x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}/u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ ) où  $s'$  désigne la dérivée de  $s$  vu comme polynôme en  $u$ . La liberté (sur  $k[u]/u^e$ ) du quotient  $\text{Fil}^r \mathcal{M}/u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$  s'obtient alors comme dans la preuve de la proposition 3.3.3 en remplaçant («  $T_{\text{qst}}$  » par «  $T_{\text{st}}$  » et) la référence au lemme 3.3.2 par une référence au lemme suivant.

**Lemme 3.3.4.** *Soit  $y \in \text{Fil}^r \hat{A}$ . On suppose que  $\phi_r(y) \neq 0$ . Alors  $u^{e-1}y \neq 0$ .*

*Démonstration.* Comme  $u$  et  $\pi_1$  diffèrent d'une unité, il suffit de montrer que  $\pi_1^{e-1}y$  ne s'annule pas. Par définition,  $y$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$y = a_0 + a_1 X + a_2 \frac{X^2}{2} + \cdots + a_n \frac{X^n}{n!}$$

pour un certain entier  $n$ , avec  $a_i \in \text{Fil}^{r-i} \hat{A}_0$  (où par convention  $\text{Fil}^j \hat{A}_0 = \hat{A}_0$  pour  $j \leq 0$ ). On a alors  $\phi_r(y) = \phi_r(a_0) + \phi_{r-1}(a_1)Y + \cdots + \phi_0(a_r) \frac{Y^r}{r!}$  (où on rappelle que  $Y = \frac{(1+X)^p - 1}{p}$ ). Comme  $\phi_r(y) \neq 0$ , il existe un indice  $i \in \{0, \dots, r\}$  tel que  $\phi_{r-i}(a_i) \neq 0$ . Le lemme 3.3.2 assure alors que  $\pi_1^{e-1}a_i$  est non nul, et donc qu'il en est de même de  $\pi_1^{e-1}y$ .  $\square$

### Calcul des composées

Nous allons montrer que  $\text{Mod}_{\text{qst}}$  (resp.  $\text{Mod}_{\text{st}}$ ) est un quasi-inverse de  $\text{Réd}_{\text{qst}}$  (resp.  $\text{Réd}_{\text{st}}$ ) simplement en calculant les composées dans les deux sens. Nous commençons par le calcul de  $\text{Mod}_{\text{qst}} \circ \text{Réd}_{\text{qst}}$  (resp.  $\text{Mod}_{\text{st}} \circ \text{Réd}_{\text{st}}$ ) largement basé sur le lemme suivant.

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ). Alors  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  (resp.  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ) est inclus dans  $u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ .*

*Démonstration.* Grâce à l'inclusion  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M}) \subset \text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  énoncée dans le lemme 3.2.4, il suffit de montrer le résultat lorsqu'il n'y a pas d'opérateur de monodromie.

Notons  $d$  le rang de  $\mathcal{M}$  comme  $\tilde{S}$ -module. Montrons tout d'abord que  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \subset u\mathcal{M}$ . On remarque à cet effet que  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})/u\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  est naturellement un quotient de  $\mathcal{M}/u\mathcal{M}$ . Soit  $d'$  sa dimension (sur  $k$ ). On a  $d' \leq d$ . Par ailleurs, en relevant une famille génératrice de  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})/u\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$ , on montre que  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  est lui aussi engendré (sur  $\tilde{S}$ ) par  $d'$  éléments. Autrement dit, il existe un morphisme surjectif  $\tilde{S}$ -linéaire  $f : \mathcal{N} \rightarrow \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  où  $\mathcal{N}$  est un  $\tilde{S}$ -module libre de rang  $d'$ . Posons  $\text{Fil}^r \mathcal{N} = f^{-1}(\text{Fil}^r \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M}))$ . En appliquant la théorie des diviseurs élémentaires à l'inclusion  $\text{Fil}^r \mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ , on définit facilement une application  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  qui fait de  $\mathcal{N}$  un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  et de  $f$  un morphisme dans cette catégorie. On en déduit une injection  $T_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \simeq T_{\text{qst}}(\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})) \hookrightarrow T_{\text{qst}}(\mathcal{N})$ . L'espace de départ est un  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel de dimension  $d$ , alors que celui d'arrivée est de dimension  $d'$ . Il en résulte  $d \leq d'$ , et puis  $d = d'$ . Ainsi  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})/u\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/u\mathcal{M}$ , ce qui entraîne  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \subset u\mathcal{M}$  comme annoncé.

La fin de la preuve consiste à répéter l'argument de la preuve de la proposition 3.3.3 en appliquant la théorie des diviseurs élémentaires non pas à l'inclusion  $\ker \text{pr} \subset \text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$  mais aux deux sous-modules  $\text{pr}^{-1}(\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M}))$  et  $\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$ , les entiers  $n_i$  qui apparaissent étant alors *a priori* relatifs. Nous laissons au lecteur le soin de faire ces modifications mineures.  $\square$

**Corollaire 3.3.6.** *Pour tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ), on a un isomorphisme canonique et fonctoriel :*

$$\text{Mod}_{\text{qst}} \circ \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M} \quad (\text{resp. } \text{Mod}_{\text{st}} \circ \text{Réd}_{\text{st}}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}).$$

*Démonstration.* On n'écrit la preuve que pour  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi}$ , l'autre cas étant entièrement analogue. Par le lemme 3.3.5, le morphisme canonique  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  induit un isomorphisme

$$\text{Fil}^r \mathcal{M}/u^e \text{Fil}^r \mathcal{M} \simeq \text{Fil}^r \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})/u^e \text{Fil}^r \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M}).$$

Il s'ensuit que  $\text{Mod}_{\text{qst}} \circ \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  s'identifie à  $\tilde{S} \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} \text{Fil}^r \mathcal{M}/u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . Le morphisme  $\text{pr} = \text{id} \otimes \phi_r$  induit une application surjective (compatible aux structures additionnelles)  $\text{Mod}_{\text{qst}} \circ \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ . Comme les espaces de départ et d'arrivée sont des  $\tilde{S}$ -modules libres de même rang, c'est un isomorphisme et le corollaire est démontré.  $\square$

On termine à présent la preuve du théorème 3.3.1 en faisant le calcul de  $\text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Mod}_{\text{qst}}$  (resp.  $\text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Mod}_{\text{st}}$ ).

**Proposition 3.3.7.** *Pour tout objet  $\mathcal{M}$  de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ), on a un isomorphisme canonique et fonctoriel :*

$$\text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M} \quad (\text{resp. } \text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Mod}_{\text{st}}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}).$$

*Démonstration.* Comme précédemment, on ne donne la preuve que pour  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^\phi$ . Posons  $\mathcal{M}' = \text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  et notons  $\text{pr} = \text{id} \otimes \phi_r : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$  la projection canonique. Nous allons montrer que  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\text{pr})$  est un isomorphisme (ce qui permettra de conclure). Étant donné que  $\text{pr}$  est surjectif, il est clair déjà que  $\text{Réd}_{\text{qst}}(\text{pr})$  l'est aussi. D'après le lemme 3.4.2, pour prouver qu'il est injectif, il suffit de montrer que  $T_{\text{qst}}(\text{pr}) : T_{\text{qst}}(\mathcal{M}') \hookrightarrow T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  est surjectif. Or, du fait que  $\mathcal{M}$  est  $T_{\text{qst}}$ -réduit, on a

$$\{x \in \mathcal{M}' / \forall h \in T_{\text{qst}}(\mathcal{M}), h(x) = 0\} = \ker \text{pr} \subset {}_u\mathcal{M}'$$

la dernière inclusion se vérifiant aisément à la main (on pourra remarquer que  $\text{pr}$  induit une application surjective — et donc un isomorphisme — de  $\mathcal{M}'/{}_u\mathcal{M}'$  dans  $\mathcal{M}/{}_u\mathcal{M}$ ). Le corollaire 2.2.7 s'applique alors et termine la preuve.  $\square$

### 3.4 La structure de pylonet en termes d'objets réduits

Le théorème 2.3.3 montre que la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  admet une structure riche. Le but de cette partie est de la comprendre en termes d'objets  $T_{\text{st}}$ -réduits, c'est-à-dire sous l'équivalence de catégories  $\text{Réd}_{\text{st}}$ . On commence par un lemme très simple qui nous sera utile à plusieurs reprises dans la suite.

**Lemme 3.4.1.** *Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans la catégorie  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ). On suppose que  $f$  est injectif et que  $\mathcal{M}'$  est  $T_{\text{qst}}$ -réduit (resp.  $T_{\text{st}}$ -réduit). Alors  $\mathcal{M}$  l'est aussi.*

*Démonstration.* De la fonctorialité de  $\text{Nil}_{\text{qst}}$  (resp.  $\text{Nil}_{\text{st}}$ ), on déduit que  $f$  envoie  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  sur  $\text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M}') = 0$  (resp.  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M})$  sur  $\text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M}') = 0$ ). Le lemme résulte alors de l'injectivité de  $f$ .  $\square$

#### Noyaux, images et conoyaux

Considérons  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ . D'après les axiomes **(Ax2)** et **(Ax2\*)**,  $f$  admet un noyau et un conoyau dans  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  que l'on note respectivement  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{C}$ . Il résulte facilement des diverses propriétés d'adjonction démontrées précédemment et du lemme 3.4.1 que  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{C}$  se calculent explicitement comme suit :

$$\mathcal{K} = \text{Gen}(\ker f) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Fil}(\text{coker } f) \quad (8)$$

où  $\ker f$  et  $\text{coker } f$  sont respectivement le noyau et le conoyau de  $f$  au sens usuel. La formule pour le noyau est intéressante car elle ne fait plus intervenir à aucun moment les représentations galoisiennes ! Malheureusement, ce n'est pas le cas pour le conoyau puisque la formule que l'on obtient fait apparaître le foncteur  $\text{Réd}_{\text{st}}$  dans la définition duquel intervient de façon essentielle le foncteur  $T_{\text{st}}$ . Malgré tout, avec un peu de pratique, il ne semble pas très difficile d'avoir une intuition du résultat final et de le démontrer *a posteriori*. Dans tous les cas, si le calcul pose vraiment un problème, on a toujours comme recours l'utilisation de la dualité.

Il n'est sans doute finalement pas anodin de remarquer que l'on dispose également d'une formule — qui plus est très simple — pour le calcul de l'image (c'est-à-dire le noyau du conoyau) dans  $\text{Réd}_{\text{st},\tilde{S}}$  puisque celle-ci s'identifie à l'image usuelle.

#### La relation d'ordre

Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation galoisienne dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$ . D'après le théorème 2.3.3, la fibre au-dessus de  $T$  (c'est-à-dire l'ensemble des  $\mathcal{M} \in '\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$  dont l'image par  $T_{\text{st}}$  est  $T$ ) a une structure de treillis. Nous allons voir que celle-ci se comprend immédiatement en termes d'objets  $T_{\text{st}}$ -réduits. Le lemme suivant (très facile) est la clé de cette compréhension.

**Lemme 3.4.2.** *Soit  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme dans la catégorie  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^\phi$  (resp.  $'\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi,N}$ ). On suppose  $T_{\text{qst}}(f)$  (resp.  $T_{\text{st}}(f)$ ) surjectif. Alors  $\text{Réd}_{\text{qst}}(f)$  (resp.  $\text{Réd}_{\text{st}}(f)$ ) est injectif.*

*Démonstration.* On peut bien sûr supposer que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont  $T_{\text{qst}}$ -réduits (resp.  $T_{\text{st}}$ -réduits), et on veut alors montrer que  $f$ , lui-même, est injectif. Soit  $x \in \ker f$ . Par hypothèse, tout  $g \in T_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  (resp.  $g \in T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ) se factorise par  $f$  et donc s'annule sur  $x$ . On en déduit que  $x \in \text{Nil}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  (resp.  $x \in \text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ) et donc que  $x = 0$  comme souhaité.  $\square$

Il résulte de ce lemme que tous les morphismes dans la catégorie fibre  $\mathcal{F}_T$  sont injectifs. Ainsi l'ordre que l'on cherche à décrire correspond simplement à l'inclusion naturelle sur les objets  $T_{\text{st}}$ -réduits. On a en outre un petit rabiot qui montre en un certain sens qu'il n'y a pas de « trous ».

**Proposition 3.4.3.** *Soient  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}''$  des objets de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . On note  $\iota$  l'inclusion de  $\mathcal{M}'$  dans  $\mathcal{M}''$  et on suppose que  $T_{\text{st}}(\iota)$  est un isomorphisme. Soit  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  tel que  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$ . Alors  $\mathcal{M} \in \text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et les deux flèches déduites par fonctorialité :*

$$T_{\text{st}}(\mathcal{M}'') \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$$

sont des isomorphismes.

*Démonstration.* Soit  $d$  la dimension sur  $\mathbb{F}_p$  de  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ ; c'est aussi le rang de  $\text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}')$ , d'où on déduit que  $\mathcal{M}'$  est engendré par au plus  $d$  éléments. Comme par hypothèse  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}') \simeq T_{\text{st}}(\mathcal{M}'')$ , la même conclusion vaut par  $\mathcal{M}''$ . Étant donné que  $\tilde{S}$  est un anneau principal (non intègre), on en déduit que  $\mathcal{M}$  est lui aussi engendré par au plus  $d$  éléments. En particulier, il est de type fini. D'autre part, le lemme 3.4.1 entraîne que  $\mathcal{M}$  est  $T_{\text{st}}$ -réduit. Ainsi,  $\mathcal{M}$  est bien un objet de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

La composée des morphismes  $T_{\text{st}}(\mathcal{M}'') \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$  est bijective car elle s'identifie à  $T_{\text{st}}(\iota)$ . Par ailleurs, la dimension (sur  $\mathbb{F}_p$ ) de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est égale au rang de  $\text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  et donc majorée par  $d$ . La proposition en résulte.  $\square$

Forts de ces résultats, il devient possible de décrire le calcul des bornes supérieures et inférieures dans la fibre  $F_T$ . Donnons-nous pour cela  $\mathcal{M} \in \text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  un objet maximal et posons  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . Soient également  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  deux objets de  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  dont l'image par  $T_{\text{st}}$  s'identifie à  $T$ . D'après la définition des objets maximaux et le lemme 3.4.2,  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  apparaissent comme des sous-objets de  $\mathcal{M}$ . Dans ces conditions, la borne supérieure de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  s'identifie à leur somme dans  $\mathcal{M}$  tandis que leur borne inférieure est  $\text{Gen}(\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2)$ . (La vérification est immédiate et laissée au lecteur.) On notera que ceci vaut encore pour n'importe quelle famille  $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$  par nécessairement finie.

### 3.5 Une formule de réciprocity

Nous avons vu que la restriction de  $T_{\text{st}}$  à  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  est pleinement fidèle. Ainsi, étant donnée une représentation  $T$  dans l'image essentielle de  $T_{\text{st}}$ , il y a un unique objet de  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  qui lui correspond. Nous montrons ci-après qu'il est possible de retrouver cet objet par une formule explicite.

#### Le foncteur $M_{\text{st}}$

Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de  $G_K$ . Le  $\tilde{S}$ -module  $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T, \hat{A})$  hérite des structures supplémentaires de  $\hat{A}$ , ce qui en fait un objet de la catégorie  $\text{Fil}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . L'association

$$T \mapsto M_{\text{st}}(T) = \text{Gen}(\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T, \hat{A}))$$

définit un foncteur contravariant  $M_{\text{st}} : \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K) \rightarrow \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Pour  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $T \in \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ , on dispose en outre d'applications de bidualité

$$\alpha_{\text{st}}(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \rightarrow M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \beta_{\text{st}}(T) : T \rightarrow T_{\text{st}} \circ M_{\text{st}}(T)$$

qui sont des morphismes respectivement dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $\text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ . De plus, en déroulant les définitions, on obtient  $\ker \alpha_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Nil}_{\text{st}}(\mathcal{M})$ , tandis qu'une vérification simple montre que  $T_{\text{st}}(\alpha_{\text{st}}(\mathcal{M})) \circ \beta_{\text{st}}(T_{\text{st}}(\mathcal{M})) = \text{id}_{T_{\text{st}}(\mathcal{M})}$  et donc que  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  apparaît (via  $\beta_{\text{st}}(T_{\text{st}}(\mathcal{M}))$ ) comme un facteur direct de  $T_{\text{st}} \circ M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ .

**Lemme 3.5.1.** *Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Posons  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  et  $\mathcal{M}' = M_{\text{st}}(T)$ . Alors :*

$$\{x \in \mathcal{M}' / \forall h \in T, \beta_{\text{st}}(T)(h)(x) = 0\}$$

est réduit à 0.

*Démonstration.* C'est évident après avoir remarqué que les  $x \in \mathcal{M}'$  sont des morphismes ( $G_K$ -équivariants) de  $T$  dans  $\hat{A}$  et que  $\beta_{\text{st}}(T)(h)(x)$  n'est rien d'autre que  $x(h)$ .  $\square$

**Corollaire 3.5.2.** Soit  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Alors  $M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  est  $T_{\text{st}}$ -réduit.

**Proposition 3.5.3.** Soit  $T$  une  $\mathbb{F}_p$ -représentation de dimension finie de  $G_K$ . Alors  $M_{\text{st}}(T)$  est un  $\tilde{S}$ -module de type fini.

*Démonstration.* Soit  $L$  une extension finie de  $K$  dont le groupe de Galois absolu, noté  $G_L$ , agit trivialement sur  $T$ . Quitte à agrandir  $L$ , on peut supposer  $\pi_1 \in L$ . Les morphismes  $G_K$ -équivariants de  $T$  dans  $\hat{A}$  prennent alors leurs valeurs dans  $\hat{A}^{G_L}$ , d'où on déduit  $M_{\text{st}}(T) = \text{Gen}(\text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T, \hat{A}^{G_L}))$ . Une induction transfinie à partir de la définition de  $\text{Gen}$  montre directement l'inclusion

$$M_{\text{st}}(T) \subset \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T, \text{Gen}(\hat{A}^{G_L})).$$

Ainsi, puisque  $\tilde{S}$  est noethérien, il suffit pour conclure de montrer que  $\text{Gen}(\hat{A}^{G_L})$  est de type fini sur  $\tilde{S}$ . Nous allons en fait montrer que  $\text{Gen}_1(\hat{A}^{G_L})$  est déjà de type fini sur  $\tilde{S}$ . Soit  $a = a_0 + a_1 X + \dots + a_n \frac{X^n}{n!} \in \hat{A}^{G_L} \cap \text{Fil}^r \hat{A}$ . Ici, donc, les  $a_i$  sont *a priori* des éléments de  $\text{Fil}^{r-i} \hat{A}_0$ . Étant donné que  $G_L$  n'agit pas sur  $X$  (on rappelle que l'on a supposé  $\pi_1 \in L$ ), le fait que  $a \in \hat{A}^{G_L}$  implique que chacun des  $a_i$  est lui-même fixe par  $G_L$ . Soit  $L_1$  une extension de  $L$  obtenue en ajoutant une racine  $p$ -ième d'une uniformisante de  $L$ , et soit  $v_p$  la valuation  $p$ -adique sur  $\bar{K}$  normalisée par  $v_p(p) = 1$ . D'après les résultats de [20], on peut écrire  $a_i = b_i + c_i$  avec  $b_i \in \mathcal{O}_{L_1}/p$  et  $v_p(c_i) \geq 1 - \frac{1}{p(p-1)}$ . La dernière condition sur la valuation montre que  $c_i$  (et donc aussi  $b_i$ ) est dans  $\text{Fil}^{r-i} \hat{A}_0$  et que  $\phi_{r-i}(c_i) = 0$ . Ainsi trouve-t-on

$$\phi_r(a) = \phi_r(b_0) + \phi_{r-1}(b_1)Y + \dots + \phi_1(b_{r-1})\frac{Y^{r-1}}{(r-1)!} + \phi(b_r)\frac{Y^r}{r!}$$

où on rappelle que  $Y = \frac{(1+X)^p - 1}{p}$ . On en déduit que  $\text{Gen}_1(\hat{A}^{G_L})$  est inclus dans le  $\tilde{S}$ -module engendré par les éléments de la forme  $\phi_{r-i}(b)Y^i$  pour  $b \in \mathcal{O}_{L_1}/p$  et  $0 \leq i \leq r$ . Comme  $\mathcal{O}_{L_1}/p$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_K/p$  (puisque  $L_1$  est une extension finie de  $K$ ), on a bien montré que  $\text{Gen}_1(\hat{A}^{G_L})$  est de type fini sur  $\tilde{S}$ .  $\square$

**La composée  $M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}$**

Le corollaire 3.5.2 combiné à la proposition 3.5.3 montre que la composée  $M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}$  définit un foncteur de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  dans  $\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ .

**Théorème 3.5.4.** Pour tout  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , le morphisme

$$\alpha_{\text{st}}(\text{Max}(\mathcal{M})) : \text{Max}(\mathcal{M}) \rightarrow M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}(\text{Max}(\mathcal{M})) \simeq M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}(\mathcal{M})$$

est surjectif (et donc induit un isomorphisme entre  $\text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Max}(\mathcal{M})$  et  $M_{\text{st}} \circ T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ).

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $\mathcal{M}$  par  $\text{Max}(\mathcal{M})$ , on peut bien sûr supposer que  $\mathcal{M}$  est maximal. Notons  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ ,  $\mathcal{M}' = M_{\text{st}}(T)$ ,  $T' = T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$  et  $f : \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow \mathcal{M}'$  le morphisme (injectif) induit par  $\alpha_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . Il s'agit de montrer que  $f$  est un isomorphisme.

On a vu que  $T$  apparaît *via*  $\beta_{\text{st}}(T)$  comme une sous-représentation (et même un facteur direct) de  $T'$ . Par ailleurs, le lemme 3.5.1 donne :

$$\{x \in \text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}') / \forall h \in T, h(x) = 0\} = \text{Nil}_{\text{st}}(\text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}')) \subset u\text{Mod}_{\text{qst}}(\mathcal{M}')$$

la dernière inclusion provenant du lemme 3.3.5. Le corollaire 2.2.7 entraîne  $T = T'$ , i.e.  $T_{\text{st}}(f)$  est un isomorphisme. Étant donné que  $\mathcal{M}$  est maximal, ceci implique l'existence d'un morphisme  $g : \mathcal{M}' \rightarrow \text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})$  tel que  $g \circ f = \text{id}_{\text{Réd}_{\text{qst}}(\mathcal{M})}$ . Par le lemme 3.4.2,  $g$  est injectif. Il s'ensuit, comme annoncé, que  $f$  est un isomorphisme.  $\square$

*Remarque.* Le théorème donne une formule qui permet de retrouver  $\text{Max}(\mathcal{M})$  à partir de  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$ . L'intérêt de disposer d'une telle formule est de pouvoir relever facilement au niveau de  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  des applications vivant *a priori* sur les représentations galoisiennes. Par exemple, voici comment on peut l'utiliser pour donner une seconde preuve de la pleine fidélité de  $T_{\text{st}} : \text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ . Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  dans  $\text{Max}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Posons  $T = T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  et  $T' = T_{\text{st}}(\mathcal{M}')$ . D'après les théorèmes 3.3.1 et 3.5.4, la composée :

$$\text{Hom}_{\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}') \xrightarrow{v} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(T', T) \xrightarrow{w} \text{Hom}_{\text{Réd}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(M_{\text{st}}(T), M_{\text{st}}(T'))$$

est un isomorphisme. On veut montrer que  $v$  est un isomorphisme, et pour cela il suffit de justifier que  $w$  est injective. Or, tout  $f \in \ker w$  s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\beta_{\text{st}}(T')} & T_{\text{st}} \circ M_{\text{st}}(T') \\ \downarrow f & & \downarrow 0 \\ T & \xrightarrow{\beta_{\text{st}}(T)} & T_{\text{st}} \circ M_{\text{st}}(T) \end{array}$$

à partir duquel on déduit directement que  $f = 0$  en utilisant l'injectivité de  $\beta_{\text{st}}(T)$  (on rappelle que ce dernier morphisme admet  $T_{\text{st}}(\alpha_{\text{st}}(\mathcal{M}))$  pour rétraction).

Pour certaines applications même, le théorème 3.5.4 peut s'appliquer alors que la pleine fidélité ne sera *a priori* d'aucun secours. C'est typiquement ce qui se passe lorsque l'on souhaite relever des applications qui ne sont linéaires (mais par exemple semi-linéaires), ou que l'on s'intéresse à des représentations dans des espaces vectoriels munis de structures supplémentaires (par exemple une forme quadratique ou symplectique). Nous verrons une application de cela en 4.2.

## 4 Compléments

### 4.1 Variante avec coefficients

Dans la pratique, il arrive souvent que l'on ait besoin d'étudier les représentations semi-stables, non pas à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  mais dans une extension finie<sup>8</sup>  $E$  de  $\mathbb{F}_p$ . Une telle représentation  $V$  peut également être vue comme une  $\mathbb{F}_p$ -représentation munie d'un morphisme d'anneaux  $E \rightarrow \text{End}_{\mathbb{F}_p[G_K]}(V)$ . On est donc amené à considérer la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$  dont les objets sont les couples  $(\mathcal{M}, \nu)$  où  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $\nu : E \rightarrow \text{End}_{\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(\mathcal{M})$  est un morphisme d'anneaux. Bien sûr, la notation est justifiée par le fait que la donnée de  $\nu$  équivaut à une structure de  $E$ -espace vectoriel — et donc de  $(\tilde{S} \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$ -module<sup>9</sup> — sur  $\mathcal{M}$ . Toutefois, pour ce que nous voulons faire ici, la première description que nous avons donnée sera plus adaptée.

On dispose bien entendu d'un foncteur oubli  $\text{Oub}_E : \text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N} \rightarrow \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ,  $(\mathcal{M}, \nu) \mapsto \mathcal{M}$ . Il est fidèle et conservatif. Par ailleurs, le foncteur  $T_{\text{st}}$  se prolonge en  $T_{\text{st}, E} : \text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N} \rightarrow \text{Rep}_E(G_K)$  obtenu simplement en faisant agir  $E$  sur  $T_{\text{st}}(\mathcal{M})$  via  $\lambda \cdot x = T_{\text{st}}(\nu(\lambda))(x)$ .

**Théorème 4.1.1.** *La fibration  $T_{\text{st}, E}$  est un pylonet (contravariant) additif et autodual. En outre, si  $(\mathcal{M}, \nu) \in \text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$ , on a :*

$$\text{Max}(\mathcal{M}, \nu) = (\text{Max}(\mathcal{M}), \text{Max}(\nu)) \quad \text{et} \quad \text{Min}(\mathcal{M}, \nu) = (\text{Min}(\mathcal{M}), \text{Min}(\nu))$$

où  $\text{Max}(\nu) : E \rightarrow \text{End}_{\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(\text{Max}(\mathcal{M}))$ ,  $\lambda \mapsto \text{Max}(\nu(\lambda))$  (et de même pour  $\text{Min}(\nu)$ ).

*Démonstration.* Le premier point ne pose aucune difficulté particulière : on peut par exemple reprendre la démonstration de la section 2 en ajoutant l'action de  $E$  à chaque étape, ce que nous laissons au lecteur. Pour la seconde assertion, on remarque d'abord que  $T_{\text{st}, E}(\text{Max}(\mathcal{M}), \text{Max}(\nu)) \simeq T_{\text{st}, E}(\mathcal{M}, \nu)$ . Ainsi, par définition des objets maximaux, on a un morphisme canonique  $f : (\text{Max}(\mathcal{M}), \text{Max}(\nu)) \rightarrow \text{Max}(\mathcal{M}, \nu)$  dans la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$ . Le morphisme  $\text{Oub}_E(f)$  s'envoie sur un isomorphisme par  $T_{\text{st}}$  et a pour source un objet maximal (de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ). On en déduit que c'est un isomorphisme, et puis que c'est aussi le cas de  $f$  en utilisant la conservativité de  $\text{Oub}_E$ . Le cas des objets minimaux se traite pareillement.  $\square$

Comme pour  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ , on note  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N} = \text{Max}(\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N})$  et  $\text{Min}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N} = \text{Min}(\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N})$ .

**Théorème 4.1.2.** *La restriction de  $T_{\text{st}, E}$  à  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$  (resp.  $\text{Min}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$ ) est pleinement fidèle et son image essentielle est stable par sous-objets et quotients.*

*Démonstration.* La pleine fidélité est une conséquence directe du théorème 2.4.1 et de la formule  $\text{Max}(\mathcal{M}, \nu) = (\text{Max}(\mathcal{M}), \text{Max}(\nu))$  (resp.  $\text{Min}(\mathcal{M}, \nu) = (\text{Min}(\mathcal{M}), \text{Min}(\nu))$ ). La stabilité découle du résultat analogue pour  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et de la pleine fidélité puisque cette dernière permet de relever l'action de  $E$ .  $\square$

<sup>8</sup>Étant donné que l'on ne s'intéresse qu'à des représentations de dimension finie, il est toujours possible de faire cette hypothèse

<sup>9</sup>On prendra garde au fait que le Frobenius sur  $\tilde{S} \otimes_{\mathbb{F}_p} E$  est bien l'élévation à la puissance  $p$  sur  $\tilde{S}$ , mais l'identité sur  $E$  !

## 4.2 Passage à une extension finie, donnée de descente

Dans ce paragraphe, on cherche à comprendre comment les catégories précédentes (et les représentations qu'elles produisent) se comportent lorsque l'on change le corps  $K$ . Pour cela, on fixe  $L$  une extension finie de  $K$  dont on note  $\mathcal{O}_L$  l'anneau des entiers,  $\ell$  le corps résiduel et  $G_L$  le groupe de Galois absolu. On note  $L_0$  la plus grande extension non ramifiée (sur  $\mathbb{Q}_p$ ) contenue dans  $L$ ; elle s'identifie à  $W(\ell)[1/p]$ . Soit  $e_L = [L : L_0]$ .

À cette situation, il est attaché de nouvelles catégories de modules définies sur l'anneau  $\tilde{S}_L = \ell[u]/u^{e_L p}$ . Afin d'éviter les confusions, nous indiquerons dans la suite, les constantes, les catégories et les foncteurs par les lettres  $K$  ou  $L$  selon qu'elles se réfèrent au corps  $K$  ou  $L$ ; par exemple, nous noterons  $e_K$  et  $e_L$ ,  $\pi_K$  et  $\pi_L$  pour les uniformisantes choisies,  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_K}^{\phi, N}$  et  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi, N}$ , ou encore  $T_{K\text{-st}}$  et  $T_{L\text{-st}}$  (pour ne pas confondre avec  $T_{\text{st}, E}$ ).

### Cas d'une extension non ramifiée

On suppose d'abord que  $L/K$  est non ramifiée. L'uniformisante  $\pi \in \mathcal{O}_K$  reste une uniformisante de  $L$  dont le polynôme minimal sur  $L_0$  est encore  $E(u)$ . On a donc  $e_K = e_L$  et on note à nouveau  $e$  cette valeur commune. L'extension des scalaires de  $k$  à  $\ell$  définit un foncteur fidèle  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_K}^{\phi, N} \rightarrow \text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi, N}$  et on vérifie directement que pour  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}_K}^{\phi, N}$ , la flèche naturelle  $T_{K\text{-st}}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{L\text{-st}}(\mathcal{M} \otimes_k \ell)$  est un isomorphisme  $G_L$ -équivariant.

**Proposition 4.2.1.** *On se donne  $L$  une extension non ramifiée de  $K$ . Soit  $E$  une extension finie de  $\mathbb{F}_p$ . Soit  $T$  une  $E$ -représentation de  $G_K$ . On suppose que la restriction de  $T$  à  $G_L$  est dans  $T_{L\text{-st}}(\text{Mod}_{/\tilde{S}_L \otimes E}^{\phi, N})$ . Alors  $T$  est dans  $T_{K\text{-st}}(\text{Mod}_{/\tilde{S}_K \otimes E}^{\phi, N})$ .*

*Démonstration.* Par les propriétés de pleine fidélité, on se ramène facilement au cas « sans coefficients ». La clôture galoisienne  $M$  de  $L$  est encore une extension non ramifiée de  $K$  et la restriction de  $T$  à  $G_M$  provient d'un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_M \otimes E}^{\phi, N}$ ; on peut donc supposer que  $L/K$  est galoisienne. Soit  $\mathcal{M}_L$  l'objet de  $\text{Max}_{/\tilde{S}_L}^{\phi, N}$  associé à  $T|_{G_L}$ . On a une action naturelle de  $G_K$  sur  $M_{L\text{-st}}(T)$  donnée par  $(\sigma f)(x) = \sigma f(\sigma^{-1}x)$ , qui se factorise à travers  $\text{Gal}(L/K) \simeq \text{Gal}(\ell/k)$  puisque les  $f \in M_{L\text{-st}}(T)$  sont par définition  $G_L$ -équivariants. Par ailleurs, la combinaison des théorèmes 3.3.1 et 3.5.4 assure que  $\mathcal{M}_L = \text{Mod}_{\text{st}}(M_{L\text{-st}}(T))$ . Ceci permet de remonter l'action de  $\text{Gal}(\ell/k)$  à  $\mathcal{M}_L$ . De la nullité de  $H^1(\text{Gal}(\ell/k), \text{GL}_{\text{erd}}(\ell))$  (où  $d$  est la dimension de  $T$ ), on déduit  $\mathcal{M}_L^{\text{Gal}(\ell/k)} \otimes_k \ell \simeq \mathcal{M}_L$ . On pose alors  $\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_L^{\text{Gal}(\ell/k)}$  et on vérifie à la main que l'isomorphisme  $T_{K\text{-st}}(\mathcal{M}_K) \simeq T_{L\text{-st}}(\mathcal{M}_L) = T$  est  $G_K$ -équivariant.  $\square$

### Cas d'une extension modérément ramifiée

On suppose maintenant que l'extension  $L/K$  est totalement et modérément ramifiée. Notons  $n$  son degré; il est premier avec  $p$ , et on fixe un entier  $m$  tel que  $mn \equiv 1 \pmod{p}$ . On suppose de surcroît que  $K$  contient toutes les racines  $n$ -ièmes de l'unité<sup>10</sup>. Si  $\pi_K$  une uniformisante de  $\mathcal{O}_K$ , le lemme de Hensel assure que  $L$  s'obtient en ajoutant à  $K$  une racine  $n$ -ième de  $\pi_K$ . Cette racine  $n$ -ième est en outre une uniformisante de  $L$ , et c'est elle que nous choisissons pour  $\pi_L$ . L'extension  $L/K$  est galoisienne et son groupe de Galois  $\text{Gal}(L/K)$  s'identifie au groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité par l'application  $\sigma \mapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L}$ . Soit encore  $\pi_{1,L}$  une racine  $p$ -ième de  $\pi_L$ . On pose  $\pi_{1,K} = \pi_{1,L}^n$ ; c'est bien une racine  $p$ -ième de  $\pi_K$ .

Nous notons  $u_K$  (resp.  $u_L$ ) la variable intervenant dans les polynômes éléments de  $\tilde{S}_K$  (resp.  $\tilde{S}_L$ ) et  $\hat{A}_K = \hat{A}_0 \langle X_K \rangle$  (resp.  $\hat{A}_L = \hat{A}_0 \langle X_L \rangle$ ) l'anneau de périodes associé. On dispose d'une inclusion  $\tilde{S}_K \hookrightarrow \tilde{S}_L$ ,  $u_K \mapsto u_L^n$  qui fait de  $\tilde{S}_L$  un  $\tilde{S}_K$ -module libre de rang  $n$ . On a également une flèche  $\psi_{K,L} : \hat{A}_K \rightarrow \hat{A}_L$  défini comme l'unique application  $\hat{A}_0$ -linéaire envoyant  $\gamma_i(X_K)$  sur  $\gamma_i((1 + X_L)^n - 1)$  pour tout  $i \geq 0$ ; c'est un isomorphisme d'anneaux  $G_L$ -équivariant d'inverse  $\psi_{L,K}$  défini comme l'unique application  $\hat{A}_0$ -linéaire

<sup>10</sup>Quitte à remplacer  $K$  par une extension non ramifiée, cette hypothèse est évidemment toujours satisfaite. Par ailleurs, comme cela a été expliqué précédemment, le passage à une extension non ramifiée ne pose pas réellement problème.

envoyant  $\gamma_i(X_L)$  sur  $\gamma_i((1 + X_K)^m - 1)$  pour tout  $i \geq 0$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}_K & \xrightarrow{u_K \mapsto \frac{\pi_{1,K}}{1+X_K}} & \hat{A}_K \\ u_K \mapsto u_L^n \downarrow & & \downarrow \psi_{L,K} \quad \downarrow \psi_{K,L} \\ \tilde{S}_L & \xrightarrow{u_L \mapsto \frac{\pi_{1,L}}{1+X_L}} & \hat{A}_L \end{array}$$

L'extension des scalaires de  $\tilde{S}_K$  à  $\tilde{S}_L$  définit de façon évidente un foncteur exact et fidèle  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_K}^{\phi,N} \rightarrow \text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N}$ .

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $\mathcal{M}_K \in \text{Mod}_{/\tilde{S}_K}^{\phi,N}$ . Alors le morphisme*

$$T_{K\text{-st}}(\mathcal{M}_K) \rightarrow T_{L\text{-st}}(\mathcal{M}_K \otimes_{\tilde{S}_K} \tilde{S}_L), \quad f \mapsto (\psi_{K,L} \circ f) \otimes_{\tilde{S}_K} \tilde{S}_L$$

*est un isomorphisme  $G_L$ -équivariant.*

*Démonstration.* On vérifie directement la  $G_L$ -équivariance et l'injectivité du morphisme de la proposition. La surjectivité résulte alors de ce que les espaces de départ et d'arrivée sont des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels de même dimension (en l'occurrence le rang de  $\mathcal{M}_K$  sur  $\tilde{S}_K$ ).  $\square$

Nous souhaitons à présent décrire les représentations de  $G_K$  dont la restriction à  $G_L$  provient d'un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N}$ . Pour cela, on a besoin au préalable d'étendre l'action galoisienne sur  $\hat{A}_L$  à tout  $G_K$ . Ceci se fait tout simplement en utilisant l'isomorphisme  $\psi_{L,K}$  (qui est déjà, rappelons-le,  $G_L$ -équivariant). De façon concrète,  $G_K$  agit de façon habituelle sur  $\hat{A}_0$  et sur  $X_L$  par la formule

$$\sigma X_L = \left( \frac{\sigma \pi_{1,K}}{\pi_{1,K}} \right)^m (1 + X_L) - 1$$

valable pour tout  $\sigma \in G_K$ . En particulier, l'action de  $G_K$  sur  $\frac{\pi_{1,L}}{1+X_L}$  n'est pas triviale, mais se fait *via* le caractère  $\omega : \text{Gal}(L/K) \rightarrow k^*$  défini par

$$\omega(\bar{\sigma}) = \left( \frac{\sigma \pi_{1,L}}{\pi_{1,L}} \right) \cdot \left( \frac{\sigma \pi_{1,K}}{\pi_{1,K}} \right)^{-m} = \left( \frac{\sigma \pi_{1,L}}{\pi_{1,L}} \right)^{1-nm}$$

où  $\sigma \in G_L$  relève  $\bar{\sigma}$ . La formule précédente a bien un sens car, d'une part, la valeur du membre de droite ne dépend pas du relevé choisi, et d'autre part, par définition de  $m$ , l'exposant  $1 - nm$  est multiple de  $p$ , ce qui assure que  $\omega$  prend ses valeurs dans le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité de  $\bar{K}$  qui sont par hypothèse toutes dans  $\mathcal{O}_K^*$  (et que l'on identifie ensuite aux racines  $n$ -ièmes de l'unité de  $k^*$  grâce au lemme de Hensel). Ceci nous conduit à définir une action de  $\text{Gal}(L/K)$  sur  $\tilde{S}_L$  en décrétant qu'il agit trivialement sur  $k$  et par l'intermédiaire de  $\omega$  sur  $u_L$ . Le morphisme habituel  $\tilde{S}_L \rightarrow \hat{A}_L$ ,  $u_L \mapsto \frac{\pi_{1,L}}{1+X_L}$  est alors  $G_K$ -équivariant.

**Définition 4.2.3.** Soit  $\mathcal{M}_L$  un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N}$ . Une *donnée de descente* (de  $L$  à  $K$ ) sur  $\mathcal{M}_L$  est une action semi-linéaire de  $\text{Gal}(L/K)$  sur  $\mathcal{M}_L$  respectant  $\text{Fil}^r \mathcal{M}_L$  et commutant à  $\phi_r$  et  $N$ .

On note  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}}$  la catégorie dont les objets sont la donnée de  $\mathcal{M}_L \in \text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N}$  et d'une donnée de descente sur  $\mathcal{M}_L$ .

La catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}}$  est additive et équipée d'une dualité obtenue en définissant sur  $\mathcal{M}_L^\vee = \text{Hom}_{\tilde{S}_L}(\mathcal{M}_L, \tilde{S}_L)$  une action de  $\text{Gal}(L/K)$  par la formule  $(\sigma f)(x) = \sigma f(\sigma^{-1}x)$  (pour  $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ ,  $f \in \mathcal{M}_L^\vee$  et  $x \in \mathcal{M}_L$ ). En outre, si  $\mathcal{M}_L \in \text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}}$ , la  $G_L$ -représentation  $T_{L\text{-st}}(\mathcal{M}_L) = \text{Hom}_{\text{Fil}^0/\tilde{S}_L}(\mathcal{M}_L, \hat{A}_L)$  se prolonge naturellement à  $G_K$  par la même formule que précédemment :  $\sigma f(x) = \sigma f(\bar{\sigma}^{-1}x)$  où  $\bar{\sigma}$  est l'image de  $\sigma$  dans  $\text{Gal}(L/K)$ . On définit comme ceci un foncteur exact et fidèle  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  noté encore  $T_{L\text{-st}}$ .

**Théorème 4.2.4.** *Le foncteur  $T_{L\text{-st}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$  est un pylonet additif et autodual. En outre, si  $\mathcal{M}_L$  est un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}}$ , l'action de  $\text{Gal}(L/K)$  s'étend à  $\text{Max}(\mathcal{M}_L)$  (resp.  $\text{Min}(\mathcal{M}_L)$ ) calculé dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N}$  et en fait un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}}$  qui s'identifie à  $\text{Max}(\mathcal{M}_L)$  (resp.  $\text{Min}(\mathcal{M}_L)$ ) calculé dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}}$ .*

*De plus, les restrictions de  $T_{L\text{-st}}$  à  $\text{Max}(\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}})$  et  $\text{Min}(\text{Mod}_{/\tilde{S}_L}^{\phi,N,\text{dd}})$  sont exactes et pleinement fidèles, et leur image essentielle est stable par sous-objets et quotients.*

*Démonstration.* Elle est semblable à celle des théorèmes 4.1.1 et 4.1.2.  $\square$

*Remarque.* Bien entendu, on peut aussi fabriquer des catégories en administrant simultanément des données de descente et l'action de coefficients. Le théorème précédent se généralise directement à cette situation composite.

### Quelques mots sur le cas général

Lorsque l'extension  $L/K$  est une extension galoisienne quelconque, les données de descente sur les objets de  $\text{Mod}_{\tilde{S}_L}^{\phi, N}$  ont été définies dans [7], §5.6. Hélas, dans cette situation plus générale, on ne peut en général pas relever de façon canonique l'action de  $\text{Gal}(L/K)$  au niveau de  $\hat{A}_L$  — ni même au niveau de  $\tilde{S}_L$  — car on ne dispose plus de l'isomorphisme  $\psi_{K,L}$ . Il est alors nécessaire de faire des choix arbitraires, ce qui impose de manipuler toute une flopée de conditions de compatibilités pas vraiment agréables. Malgré tout, il est probable qu'il subsiste un énoncé analogue à celui du théorème 4.2.4 dans ce contexte plus général.

### 4.3 Quotients de réseaux

Nous nous intéressons ici aux  $E$ -représentations qui peuvent s'écrire comme un quotient (annulé par  $p$ ) de deux réseaux dans une  $W(E)[1/p]$ -représentation semi-stable dont les poids de Hodge-Tate sont dans  $\{0, \dots, r\}$ . Pour expliquer le lien avec la théorie que nous avons développée dans les pages précédentes, nous avons besoin dans un premier temps d'introduire la notion de *module fortement divisible* due à Breuil.

Soit  $S$  le complété  $p$ -adique de l'enveloppe à puissances divisées (compatibles aux puissances divisées canoniques sur  $p$ ) de  $W[u]$  par rapport au noyau de  $s : W[u] \rightarrow \mathcal{O}_K$ ,  $u \mapsto \pi$ . Il est muni :

- d'une filtration  $\text{Fil}^i S$  définie comme le complété  $p$ -adique de la filtration donnée par les puissances divisées ;
- d'un Frobenius  $\phi : S \rightarrow S$  défini comme l'unique morphisme d'anneaux, continu pour la topologie  $p$ -adique, qui agit sur  $K_0$  comme le Frobenius et qui envoie  $u$  sur  $u^p$  ;
- d'un opérateur de monodromie  $N : S \rightarrow S$  défini comme l'unique application continue  $W$ -linéaire qui envoie  $u^n$  sur  $-nu^n$ .

Pour  $i < p - 1$  (et, donc, en particulier pour  $i = r$ ), on a  $\phi(\text{Fil}^i \mathcal{M}) \subset p^i \mathcal{M}$ , ce qui permet de définir l'application  $\phi_i = \frac{\phi}{p^i} : \text{Fil}^i \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ . On remarque que le polynôme minimal de  $\pi$  sur  $K_0$ , traditionnellement noté  $E(u)$  est un polynôme d'Eisenstein d'où on déduit que  $\phi_1(E(u))$  est une unité de  $S$ . On dispose en outre d'un morphisme évident  $S \rightarrow \tilde{S}$ ,  $u \mapsto u$ ,  $\gamma_i(u^e) \mapsto 0$  pour  $i \geq p$ . Il permet de voir  $\tilde{S}$  comme une  $S$ -algèbre et se factorise par  $S_1 = S/pS$ . Un module fortement divisible est alors la donnée des points suivants :

1. un  $S$ -module libre de rang fini  $\mathcal{M}$  ;
2. un sous-module  $\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$  contenant  $\text{Fil}^r S \mathcal{M}$  ;
3. un opérateur  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant

$$(\forall s \in S) (\forall x \in \mathcal{M}) \quad \phi_r(sx) = \phi_r(s) \cdot \frac{\phi_r(E(u)^r x)}{\phi_1(E(u))^r}$$

et dont l'image engendre exactement  $p^r \mathcal{M}$  ;

4. un opérateur  $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  vérifiant :
  - (condition de Leibniz)  $N(sx) = sN(x) + N(s)x$  pour tout  $x \in \mathcal{M}$  et  $s \in S$  ;
  - (transversalité de Griffith)  $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$  ;
  - le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow \phi_1(E(u))N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array} \quad (9)$$

On note  $\text{Mod}_{\tilde{S}}^{\phi, N}$  la catégorie des modules fortement divisibles, les morphismes étant naturellement les applications  $S$ -linéaires commutant aux structures supplémentaires. On définit de même la catégorie  $\text{Mod}_{S_1}^{\phi, N}$  en remplaçant partout  $S$  par  $S_1 = S/pS$ . Une adaptation immédiate de la proposition 2.2.2.1 de [2] montre



que le fonction  $T : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M} \otimes_{S_1} \tilde{S}$  donne naissance à une équivalence de catégories entre  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $\text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$  dont un quasi-inverse est donné par la formule

$$T^{-1}(\mathcal{M}) = S_1 \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} \frac{\text{Fil}^r \mathcal{M}}{u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}}.$$

D'autre part, on dispose d'un foncteur  $\hat{T}_{\text{st}} : \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$  dont la définition est analogue à celle de  $T_{\text{st}}$  mais fait intervenir un anneau de période plus compliqué que nous ne souhaitons pas décrire ici. Quoi qu'il en soit, dans [21], Liu a montré que  $\hat{T}_{\text{st}}$  induit une anti-équivalence entre  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et la catégorie des réseaux dans les représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et  $r$ . Finalement, on montre qu'un morphisme surjectif  $\hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  (avec  $\hat{\mathcal{M}} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  et  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ ) induit une surjection  $\hat{T}_{\text{st}}(\hat{\mathcal{M}}) \rightarrow T_{\text{st}} \circ T(\mathcal{M})$  et donc fait apparaître  $T_{\text{st}} \circ T(\mathcal{M})$  comme un quotient d'un réseau dans une représentation semi-stable.

**Lemme 4.3.1.** *Soient  $\hat{\mathcal{M}} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ,  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$ . Notons  $\text{pr} : \mathcal{M} \rightarrow T(\mathcal{M})$  la projection canonique. Soit  $f$  un morphisme  $S$ -linéaire  $\hat{\mathcal{M}} \rightarrow T(\mathcal{M})$  compatible aux structures additionnelles. Alors, il existe un unique morphisme  $S$ -linéaire et compatible aux structures additionnelles  $g : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  tel que  $f = \text{pr} \circ g$ . De plus,  $g$  est surjectif si, et seulement si  $f$  l'est.*

*Démonstration.* L'unicité de  $g$  est facile et laissée au lecteur. Pour l'existence, on remarque d'abord que  $f$  passe au quotient pour définir un morphisme  $\hat{f} : \hat{\mathcal{M}} \otimes_S \tilde{S} \rightarrow T(\mathcal{M})$  dans la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . L'image de  $\hat{f}$  par  $T^{-1}$  est alors un morphisme de  $\hat{\mathcal{M}}/p\hat{\mathcal{M}}$  dans  $\mathcal{M}$ , qui composé avec la projection  $\hat{\mathcal{M}} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}/p\hat{\mathcal{M}}$  fournit un  $g$  adéquat. Évidemment si  $g$  est surjectif,  $f$  l'est aussi. Réciproquement si  $f$  est surjectif,  $g \otimes_S W = f \otimes_S W$  l'est aussi, ce qui suffit à assurer la surjectivité de  $g$  lui-même.  $\square$

*Remarque.* On montre de même qu'un morphisme  $f : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Réd}_{\text{st}}(T(\mathcal{M}))$  se relève en une unique flèche  $g : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ .

Tout cela nous conduit à poser la définition suivante :

**Définition 4.3.2.** On note  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$  formée des objets  $(\mathcal{M}, \nu)$  pour lesquels il existe un module fortement divisible  $\hat{\mathcal{M}}$ , un morphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -algèbres  $\hat{\nu} : W(E) \rightarrow \text{End}_{\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}}(\hat{\mathcal{M}})$  et un morphisme surjectif  $S$ -linéaire compatible à toutes les structures  $f : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  tels que pour tout  $\hat{\lambda} \in W(E)$ ,  $\hat{\nu}(\hat{\lambda})$  stabilise  $\ker f$  et induise sur  $\mathcal{M}$  l'application  $\nu(\lambda)$  où  $\lambda$  est la réduction de  $\hat{\lambda}$  modulo  $p$ .

**Lemme 4.3.3.** *Soient  $\hat{\mathcal{M}} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ ,  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/S_1}^{\phi, N}$  et  $f : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  un morphisme surjectif compatible à  $\text{Fil}^r$  et  $\phi_r$ . Alors le morphisme  $\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}$  induit par  $f$  est surjectif.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F} = f(\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$ . De la surjectivité de  $f$ , on déduit que le module engendré par  $\phi_r(\mathcal{F})$  est  $\mathcal{M}$  tout entier. L'isomorphisme

$$S_1 \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} \frac{\text{Fil}^r \mathcal{M}}{u^e \text{Fil}^r \mathcal{M} + \text{Fil}^p S_1 \mathcal{M}} \simeq S_1 \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} \frac{\text{Fil}^r T(\mathcal{M})}{u^e \text{Fil}^r T(\mathcal{M})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

montre alors que  $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{F} + u^e \text{Fil}^r \mathcal{M} + \text{Fil}^p S_1 \mathcal{M}$ . Or on a  $\text{Fil}^p S_1 \mathcal{M} \subset \text{Fil}^r S_1 \mathcal{M} = \phi_r(\text{Fil}^r S \hat{\mathcal{M}}) \subset \mathcal{F}$ , ce qui donne  $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{F} + u^e \text{Fil}^r \mathcal{M}$ . La conclusion s'ensuit facilement en remarquant que la suite des puissances de  $u^e$  (dans  $S_1$ ) s'annule à partir d'un certain rang (en l'occurrence  $u^{ep}$ ).  $\square$

**Théorème 4.3.4.** *La restriction de  $T_{\text{st}}$  à  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$  est un pylonet additif et autodual.*

*Démonstration.* Il faut vérifier les axiomes **(Ax1)**, **(Ax2)**, **(Ax3a)**, **(Ax3b)**, **(Ax4)** et **(Ax5)**. Éventuellement en utilisant les énoncés analogues pour le foncteur  $T_{\text{st}}$  défini sur la catégorie  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$  tout entière, on établit facilement **(Ax1)**, **(Ax3b)** et **(Ax5)**. L'axiome **(Ax3a)** ne pose pas non plus véritablement problème : en reprenant les notations de la démonstration de la proposition 2.3.2, il suffit de montrer que si  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$ , alors il en est de même de  $\mathcal{M}'$ , ce qui est clair puisque  $\mathcal{M}'$  est défini comme un quotient de  $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ . La vérification de **(Ax2)** est, elle aussi, très simple : il suffit de justifier que si  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  est un morphisme dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$ , alors  $\mathcal{M}'' = \text{coker } f$  (calculé dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$ ) est dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$  et pour cela, d'après le lemme 4.3.1, il suffit d'établir la surjectivité de  $g : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}''$ ... qui résulte directement de la construction.

Il ne reste finalement qu'à vérifier **(Ax4)**. On suppose pour simplifier que  $E = \mathbb{F}_p$ , le cas général s'obtenant de la même façon en ajoutant l'action de  $E$  ou de  $W(E)$  à chaque étape. Soit  $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\text{st}}$ . Par hypothèse, il existe  $\hat{\mathcal{M}} \in \text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$  muni d'un morphisme surjectif  $f : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$ . Par le lemme 4.3.1, celui-ci se relève en un morphisme surjectif  $g : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow T^{-1}(\mathcal{M})$  et par le lemme 4.3.3,  $g$  induit aussi une surjection au niveau des  $\text{Fil}^r$ . En utilisant les équivalences de catégories données par les théorèmes 2.2.1 et 2.3.1 de [13], on montre aisément que  $\hat{\mathcal{M}}' = \ker g$  est encore un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S}}^{\phi, N}$ . Ainsi on obtient une suite exacte  $0 \rightarrow \hat{\mathcal{M}}' \rightarrow \hat{\mathcal{M}} \rightarrow T^{-1}(\mathcal{M}) \rightarrow 0$  qui induit également une suite exactement au niveau des  $\text{Fil}^r$ . Le lemme V.3.4.1 de [9] montre alors l'existence d'une nouvelle suite exacte<sup>11</sup> :

$$0 \rightarrow \hat{\mathcal{M}}^* \rightarrow \hat{\mathcal{M}}'^* \rightarrow T^{-1}(\mathcal{M}^*) \rightarrow 0$$

à partir de laquelle on obtient le morphisme surjectif que l'on cherchait.  $\square$

Notons  $\text{Max}^{\text{st}}$  et  $\text{Min}^{\text{st}}$  les endofoncteurs de  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$  qui découlent du théorème précédent. Notez bien que si  $\mathcal{M}$  est dans  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$ , c'est aussi un objet de  $\text{Mod}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$  auquel on peut donc appliquer les deux foncteurs  $\text{Max}$  et  $\text{Max}^{\text{st}}$ . Je ne sais pas si ces foncteurs coïncident en général, et c'est la raison pour laquelle je préfère introduire deux notations distinctes. Définissons également  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$  (resp.  $\text{Min}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$ ) comme l'image essentielle de  $\text{Max}^{\text{st}}$  (resp.  $\text{Min}^{\text{st}}$ ).

**Théorème 4.3.5.** *La restriction de  $T_{\text{st}}$  à  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$  (resp.  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$ ) est pleinement fidèle et son image essentielle est stable par sous-objets et quotients.*

*Démonstration.* On ne traite que le cas des objets maximaux, l'autre s'obtenant par dualité. La fidélité ne pose aucun problème. Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  des objets de  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\text{st}}$  et  $f : T_{\text{st}, E}(\mathcal{M}') \rightarrow T_{\text{st}, E}(\mathcal{M})$  une application  $G_K$ -équivariante. Par le théorème 4.1.2,  $f$  provient d'un morphisme  $g : \text{Max}(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Max}(\mathcal{M}')$ . Par ailleurs, par le lemme 3.4.2,  $\text{Réd}_{\text{st}}(\text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}))$  et  $\text{Réd}_{\text{st}}(\text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}'))$  apparaissent respectivement comme des sous-modules de  $\text{Réd}_{\text{st}}(\text{Max}(\mathcal{M}))$  et  $\text{Réd}_{\text{st}}(\text{Max}(\mathcal{M}'))$ . Pour établir la pleine fidélité, il suffit de montrer que  $\text{Réd}_{\text{st}}(g)$  envoie  $\text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M})$  sur  $\text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}')$ . Considérons  $\hat{\mathcal{M}}$  et  $\hat{\mathcal{M}}'$  des modules fortement divisibles munis de surjections  $h : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M})$  et  $h' : \hat{\mathcal{M}}' \rightarrow \text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}')$  et attardons-nous sur le morphisme

$$(\text{Réd}_{\text{st}}(g) \circ h) \oplus h' : \hat{\mathcal{M}} \oplus \hat{\mathcal{M}}' \rightarrow \text{Réd}_{\text{st}} \circ \text{Max}(\mathcal{M}').$$

Soit  $\mathcal{M}''$  son image. Par la proposition 3.4.3,  $T_{\text{st}, E}(\mathcal{M}'') \simeq T_{\text{st}, E} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M})$  (la compatibilité à l'action de  $E$  venant de la fonctorialité), et donc par maximalité de  $\text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}')$ , on obtient  $\mathcal{M}'' \subset \text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}')$ . Ceci entraîne  $\text{Réd}_{\text{qst}}(g) \circ h(\hat{\mathcal{M}}) \subset \text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}')$ , i.e.  $\text{Réd}_{\text{qst}}(g)(\text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M})) \subset \text{Réd}_{\text{qst}} \circ \text{Max}^{\text{st}}(\mathcal{M}')$  comme voulu.

Lorsque  $E = \mathbb{F}_p$ , la stabilité par sous-objets découle directement de la proposition 2.2.5. La stabilité par quotients s'obtient par dualité, tandis que le cas des coefficients quelconques se fait en relevant l'action de  $E$  grâce à la pleine fidélité.  $\square$

## Représentations cristallines

On peut également s'intéresser aux réseaux à l'intérieur de représentations cristallines plutôt que semi-stables ; au niveau des modules fortement divisibles, ceci correspond à  $N \equiv 0 \pmod{uS + \text{Fil}^p S}$ , c'est-à-dire  $N(\hat{\mathcal{M}}) \subset (uS + \text{Fil}^p S)\hat{\mathcal{M}}$ . En réalité, on peut légèrement simplifier cette condition comme l'affirme le lemme suivant.

**Lemme 4.3.6.** *Soit  $\hat{\mathcal{M}}$  un module fortement divisible tel que  $N(\hat{\mathcal{M}}) \subset (uS + \text{Fil}^p S)\hat{\mathcal{M}}$ . Alors  $N(\hat{\mathcal{M}}) \subset u\hat{\mathcal{M}}$ .*

*Démonstration.* Le diagramme (9) montre que  $N \circ \phi_r(\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$  est inclus dans  $\phi_r(\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$ . Pour estimer ce dernier, on utilise la proposition 4.1.2 de [21] qui assure l'existence de  $x_1, \dots, x_d \in \text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$  tels que

- $\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}$  est engendré par les  $x_i$  et  $\text{Fil}^p S \hat{\mathcal{M}}$  ;
- les  $e_i = \phi_r(x_i)$  forment une base de  $\hat{\mathcal{M}}$  ;
- les  $E(u)^r e_i$  s'expriment comme une combinaison linéaire à coefficients dans  $S$  des  $x_i$ .

Ainsi, en définissant

$$T = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i \frac{E(u)^i}{(i+r)!}, \quad a_i \in W[u], \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0 \right\}$$

<sup>11</sup>Dans *loc. cit.*, on utilise la notation «  $\vee$  » à la place de «  $\star$  ».

on a l'inclusion  $\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}} \subset Tx_1 + \dots + Tx_r$  (où tout est vu par exemple dans  $\hat{\mathcal{M}} \otimes_S K_0[[u]]$ ). Par suite,  $\phi_r(\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}})$  est contenu dans le  $\phi(T)$ -module engendré par les  $e_i$ .

Montrons que  $\phi(T) \cap (uS + \text{Fil}^p S) \subset uS$ . On considère pour cela un élément  $x$  dans l'intersection précédente, et on souhaite montrer qu'il est dans  $uS$ . On peut écrire  $x = \phi(y)$  avec  $y = \sum_{i \geq 0} a_i \frac{E(u)^i}{(i+r)!}$  où  $a_i \in W[u]$  converge vers 0. En regardant modulo  $uS + \text{Fil}^p S$ , on obtient  $\sum_{i \geq 0} a_i(0) \frac{E(0)^i}{(i+r)!} = 0$ , puis

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i \geq 0} \phi(a_i) \frac{\phi(E(u))^i - \phi(E(0))^i}{(i+r)!} + \sum_{i \geq 0} [\phi(a_i) - \phi(a_i(0))] \frac{\phi(E(0))^i}{(i+r)!} \\ &= [\phi(E(u)) - \phi(E(0))] \sum_{s,t \geq 0} \phi(a_{s+t+1}) \frac{\phi(E(u))^s \phi(E(0))^t}{(s+t+r+1)!} + \sum_{i \geq 0} [\phi(a_i) - \phi(a_i(0))] \frac{\phi(E(0))^i}{(i+r)!} \end{aligned}$$

Étant donné que  $u$  — et même à vrai dire  $u^p$  — divise  $\phi(E(u)) - \phi(E(0))$  et  $\phi(a_i) - \phi(a_i(0))$ , il suffit de justifier que  $\frac{\phi(E(u))^s \phi(E(0))^t}{(s+t+r+1)!} \in S$  pour tous entiers  $s$  et  $t$ . Le numérateur de cette dernière fraction est manifestement divisible par  $p^{s+t}$ . De plus,

$$v_p \left( \frac{p^{s+t}}{(s+t+r+1)!} \right) > s+t - \frac{s+t+r+1}{p-1} = \frac{p-2}{p-1}(s+t) - \frac{r+1}{p-1} \geq -\frac{r+1}{p-1} \geq -1$$

d'où on déduit que  $\frac{p^{s+t}}{(s+t+r+1)!} \in W \subset S$ . Au final,  $\frac{\phi(E(u))^s \phi(E(0))^t}{(s+t+r+1)!} \in S$  comme voulu.

On conclut maintenant la preuve du lemme comme suit. Par ce qui précède, on a  $N \circ \phi_r(\text{Fil}^r \hat{\mathcal{M}}) \subset u\hat{\mathcal{M}}$ , et donc en particulier  $N(e_i) \in u\hat{\mathcal{M}}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, x_d\}$ . Par ailleurs, on vérifie tout de suite que pour tout  $s \in S$ ,  $N(s)$  est divisible par  $u$ . Ainsi  $N(se_i) = N(s)e_i + sN(e_i)$  est lui aussi multiple de  $u$ . La valeur de  $N$  sur n'importe quelle combinaison linéaire des  $e_i$  est donc multiple de  $u$ . Comme les  $e_i$  forment une base de  $S$ , on a bien démontré que  $N(\hat{\mathcal{M}}) \subset \hat{\mathcal{M}}$ .  $\square$

On peut alors adapter la définition 4.3.2 dans ce contexte :

**Définition 4.3.7.** On note  $\text{Mod}_{/\hat{S} \otimes E}^{\text{cris}}$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}_{/\hat{S} \otimes E}^{\phi, N}$  formée des objets  $(\mathcal{M}, \nu)$  pour lesquels il existe un module fortement divisible  $\hat{\mathcal{M}}$  avec  $N(\hat{\mathcal{M}}) \subset u\hat{\mathcal{M}}$ , un morphisme de  $\mathbb{Z}_p$ -algèbres  $\hat{\nu} : W(E) \rightarrow \text{End}_{\text{Mod}_{/\hat{S}}^{\phi, N}}(\hat{\mathcal{M}})$  et un morphisme surjectif  $S$ -linéaire compatible à toutes les structures  $f : \hat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$  tels que pour tout  $\hat{\lambda} \in W(E)$ ,  $\hat{\nu}(\hat{\lambda})$  stabilise  $\ker f$  et induise sur  $\mathcal{M}$  l'application  $\nu(\lambda)$  où  $\lambda$  est la réduction de  $\hat{\lambda}$  modulo  $p$ .

**Théorème 4.3.8.** La restriction de  $T_{\text{st}}$  à  $\text{Mod}_{/\hat{S} \otimes E}^{\text{cris}}$  est un pylonet additif et autodual. La restriction de  $T_{\text{st}}$  à la catégorie des objets maximaux (resp. minimaux) correspondants est pleinement fidèle et son image essentielle est stable par sous-objets et quotients.

*Démonstration.* C'est la même que dans le cas semi-stable.  $\square$

De façon similaire, on peut considérer la sous-catégorie pleine de  $\text{Mod}_{/\hat{S} \otimes E}^{\phi, N}$  comprenant les objets  $\mathcal{M}$  pour lesquels  $N(\mathcal{M}) \subset u\mathcal{M}$  (sans demander, donc, qu'il existe un relèvement sous forme de module fortement divisible). Par les mêmes méthodes, on a encore un théorème analogue dans cette dernière situation.

## 4.4 Objets simples

On suppose dans cette sous-section  $er \geq p-1$  (le cas  $er < p-1$  a déjà été étudié dans [10]). On note  $K^{\text{nr}} \subset \bar{K}$  l'extension maximale non ramifiée de  $K$ . Son corps résiduel s'identifie à une clôture algébrique de  $k$ , notée  $\bar{k}$ . Pour tout entier  $d$ , on note  $\mathbb{F}_{p^d}$  l'unique sous-corps de  $\bar{k}$  de cardinal  $p^d$ . On fixe par ailleurs  $E$  une extension finie de  $\mathbb{F}_p$  de degré  $h$ , ainsi qu'un isomorphisme  $\tau : E \rightarrow \mathbb{F}_{p^h}$ . Dans la suite, on supposera toujours que l'image de  $\tau$  est incluse dans  $k$  et on utilisera cette hypothèse pour identifier  $E$  à un sous-corps de  $k$ .

Soit  $\mathcal{R}_h$  l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments de  $\mathbb{Z}_{(p)}$  (le localisé de  $\mathbb{Z}$  en  $p$ ) pour la relation d'équivalence suivante :  $a \sim b$  si, et seulement si, il existe un entier  $n$  tel que  $a \equiv p^{hn}b \pmod{\mathbb{Z}}$ . Via l'écriture en base  $p$ , les éléments de  $\mathcal{R}_h$  s'identifient à l'ensemble des suites  $(a_i)$  périodiques (depuis le début) d'entiers compris entre 0 et  $p-1$  où on a identifié la suite  $(a_i)$  à la suite  $(a_{i+h})$ , et où on a ôté la suite constante égale à  $p-1$ . À tout  $a \in \mathcal{R}_h$ , on associe un objet  $(\mathcal{M}(a), \nu_a)$  de  $\text{Max}_{/\hat{S} \otimes E}^{\phi, N}$  défini comme suit. On choisit  $(a_i)$  une suite périodique qui représente  $a$ , on note  $d$  sa plus petite période,  $d_h = \text{PPCM}(d, h)$  et on définit :

- $\mathcal{M}(a) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d_h \mathbb{Z}} \tilde{S} \cdot e_i$  ;
- $\text{Fil}^r \mathcal{M}(a) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/d_h \mathbb{Z}} \tilde{S} \cdot u^{er-a_i} e_i$  ;
- $\phi_r(u^{er-a_i} e_i) = (-1)^r e_{i+1}$  ;
- $N(e_i) = 0$  ;
- $\nu_a(\lambda)(e_i) = \lambda^{p^i} e_i$  ( $\lambda \in E \subset k$ ).

À partir de la proposition 3.6.7 de [13], on montre facilement que  $\mathcal{M}(a)$  est un objet de  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$ . De plus, on vérifie sans mal qu'il ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix du représentant  $(a_i)$ .

On peut en outre déterminer la restriction au groupe d'inertie, noté  $I_K$ , de la représentation galoisienne associée à  $\mathcal{R}_h$ . Pour cela, on a tout d'abord besoin de rappeler la définition des caractères fondamentaux de Serre. Pour tout entier  $d$ , on définit  $\theta_d : I_K \rightarrow \mu_{p^d-1}(\bar{K}) \simeq \mathbb{F}_{p^d}^\times$ ,  $g \mapsto \frac{g\pi_d}{\pi_d}$ , l'isomorphisme entre  $\mu_{p^d-1}(\bar{K})$  et  $\mathbb{F}_{p^d}^\times$  étant induit par la réduction modulo l'idéal maximal. (On rappelle que  $\pi_d$  une racine  $p^d$ -ième fixée de  $\pi$ .)

**Proposition 4.4.1.** *Soient  $a \in \mathcal{R}_h$ ,  $(a_i)$  une suite périodique représentant  $a$  et  $d$  sa plus petite période. Alors, en tant que  $E$ -représentation de  $I_K$  :*

$$T_{\text{st}, E}(\mathcal{M}(a), \nu_a) = \mathbb{F}_{p^d}(\theta_d^{a_0 + p^{d-1}a_1 + \dots + p^{a_{d-1}}}) \otimes_{\mathbb{F}_{p^d} \cap E} E$$

où  $\mathbb{F}_{p^d}(\psi)$  désigne la  $\mathbb{F}_{p^d}$ -représentation de  $G_K$  de dimension 1 où l'action se fait par le caractère  $\psi$ .

*Démonstration.* Elle est semblable à celle du théorème 5.2.2 de [10] ; nous nous contentons donc de renvoyer à cette référence. On prendra toutefois garde au twist qui apparaît dans la définition de  $\hat{A}_0$  qui n'est pas discuté avec beaucoup d'attention dans *loc. cit.*, et peut facilement être source d'erreurs dans les calculs (l'erreur se manifestant le plus souvent par un décalage d'indice dans l'exposant de  $\theta_d$ ).  $\square$

**Corollaire 4.4.2.** *On suppose  $er \geq p-1$  et  $k$  algébriquement clos. Les objets simples de  $\text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N}$  sont exactement les  $\mathcal{M}(a)$ ,  $a \in \mathcal{R}_h$ . De plus, ils sont deux à deux non isomorphes.*

*Démonstration.* Les arguments des paragraphes 1.6 et 1.7 de [23] montrent que les  $E$ -représentations irréductibles de  $G_K = I_K$  sont exactement les  $T_{\text{st}, E}(\mathcal{M}(a), \nu_a)$  et qu'elles sont deux à deux non isomorphes. Le corollaire provient alors de la pleine fidélité de  $T_{\text{st}, E} : \text{Max}_{/\tilde{S} \otimes E}^{\phi, N} \rightarrow \text{Rep}_E(G_K)$  (théorème 4.1.2).  $\square$

## Références

- [1] C. Breuil, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline, et cohomologie de Čech*, Bull. Soc. math. France **124** (1996), 587–647
- [2] C. Breuil, *Construction de représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [3] C. Breuil, *Cohomologie étale de  $p$ -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620
- [4] C. Breuil, *Une application du corps des normes*, Compositio math. **117** (1999), 189–203
- [5] C. Breuil, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122
- [6] C. Breuil, *Groupes  $p$ -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. **152** (2000), 489–549
- [7] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$  : wild 3-adic exercises*, J. of Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939
- [8] K. Buzzard, F. Diamond et F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod  $l$  Galois representations over totally real fields*, preprint (2005).
- [9] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, thèse de doctorat (2005)
- [10] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas  $er < p-1$* , J. reine angew. Math. **594** (2006), 35–92
- [11] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, Invent. math. **171** (2008), 629–699
- [12] X. Caruso, *Schémas en groupes et poids de Diamond-Serre*, preprint (2007)
- [13] X. Caruso, T. Liu, *Quasi-semi-stable representations*, preprint (2007)
- [14] X. Caruso, D. Savitt, *Polygones de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables*, à paraître à Math. Ann.
- [15] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$* , Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241–280

- [16] J. M. Fontaine, *Représentations  $p$ -adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift II, (1991), 249–309
- [17] T. Gee, *On the weights of mod  $p$  Hilbert modular forms*, preprint (2008)
- [18] S. Hattori, *On a ramification bound of semi-stable torsion representations over a local field*, preprint (2008)
- [19] K. Kato, *Logarithmic structure of Fontaine-Illusie*, Algebraic, Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins University Press (1989), 191–224
- [20] J. Le Borgne, *Détermination de la constante optimale dans le théorème d’Ax-Sen-Tate*, en préparation
- [21] T. Liu, *On lattices in semi-stable representations : a proof of a conjecture of Breuil*, à paraître dans Compositio math.
- [22] T. Liu, *Torsion  $p$ -adic Galois representations*, Ann. Scient. ENS. **40** (2007), 633–674
- [23] J. P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259–331
- [24] J. Wildeshaus, *On derived functors on categories without enough injectives*, J. Pure Appl. Algebra **150** (2000), 207–213